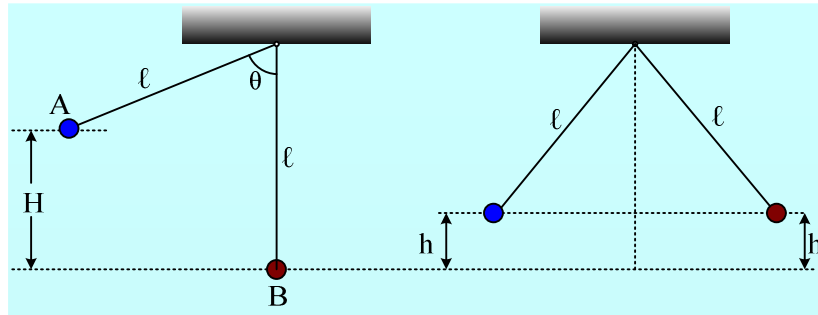


Δύο σφαίρες στα άκρα ίσων νημάτων.

Δυο μικρές σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες και μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, κρέμονται με δύο νήματα ίσου μήκους, από το ίδιο σημείο. Εκτρέπουμε την Α σφαίρα, ώστε το νήμα να σχηματίσει γωνία θ με την κατακόρυφο, ανεβάζοντάς την κατά Η και την αφήνουμε να κινηθεί. Μετά την ελαστική και μετωπική μεταξύ τους κρούση, οι σφαίρες φτάνουν ταυτόχρονα στο ίδιο ύψος h , όπως στο σχήμα.



- 1) Ποιες προτάσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες:
 - a. Μεγαλύτερη μάζα έχει η Β σφαίρα.
 - b. Οι ταχύτητες μετά την κρούση των δύο σφαιρών, είναι αντίθετες.
 - c. Οι δύο σφαίρες έχουν ίσες κατά μέτρο ορμές, αμέσως μετά την κρούση.
 - d. Το μέτρο της ορμής που θα αποκτήσει η Β σφαίρα λόγω κρούσης, είναι μικρότερο από το μέτρο της αρχικής ορμής της σφαίρας Α πριν την κρούση.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

- 2) Αν $H=4h$, όπου H το αρχικό ύψος από το οποίο αφέθηκε η Α σφαίρα και h το τελικό μέγιστο ύψος στο οποίο θα ανέβουν, τότε:

i) Οι μάζες των δύο σφαιρών ικανοποιούν τη σχέση:

$$\alpha) m_1=m_2 \quad \beta) m_1=2m_1 \quad \gamma) m_2=2m_1 \quad \delta) m_2=3m_1$$

ii) Σε μια στιγμή, στη διάρκεια της κρούσης, το μέτρο της τάσης του νήματος που κρέμεται η Α σφαίρα, γίνεται ίση με το βάρος της. Τότε η Β σφαίρα έχει κινητική ενέργεια:

$$\alpha) \frac{1}{3} m_1gh. \quad \beta) \frac{1}{2} m_1gh \quad \gamma) \frac{2}{3} m_1gh \quad \delta) m_1gh$$

Απάντηση:

- 1) Έστω v_1 η ταχύτητα της Α σφαίρας πριν την κρούση, τότε οι ταχύτητες μετά την κρούση των δύο σφαιρών είναι:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$

- a. Αφού η Α σφαίρα κινήθηκε μετά την κρούση προς τ' αριστερά η ταχύτητά της v_1' έχει αντίθετη φορά από την αρχική ταχύτητα v_1 (πριν την κρούση). Έτσι θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική, θα έχουμε $v_1 > 0$ και $v_1' < 0$, αλλά τότε από την σχέση (1) προκύπτει ότι $m_1 < m_2$. Η πρόταση είναι λοιπόν σωστή.

- b. Κατά την κίνηση κάθε σφαίρας, μετά την κρούση και μέχρι να φτάσουν σε ύψος h , η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος, μια συντηρητική (διατηρητική) δύναμη. Συνεπώς, θεωρώντας Ε.Μ.Δ.Ε. το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την θέση που έγινε η κρούση, έχουμε:

$$K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}} \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = m g h \rightarrow v = \sqrt{2 g h} \quad (3)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η ταχύτητα με την οποία ξεκίνησαν την άνοδό τους οι δυο σφαίρες δεν εξαρτάται από τη μάζα τους, συνεπώς η πρόταση είναι σωστή.

- c. Αφού οι σφαίρες έχουν αντίθετες ταχύτητες αλλά διαφορετικές μάζες, δεν θα έχουν αντίθετες ορμές, αφού $p = m v$. Η πρόταση είναι λανθασμένη.
- d. Εφαρμόζοντας την ΑΔΟ πριν και μετά την κρούση των δύο σφαιρών παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho} = \vec{P}_{\mu\epsilon\tau} \rightarrow m_1 v_1 = -m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \rightarrow P'_2 = m_1 v_1 + m_1 v'_1$$

Συνεπώς το μέτρο της τελικής ορμής της Β σφαίρας είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της αρχικής ορμής της Α. Η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 2) i) Από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι $v'_1 = -v'_2$ και από (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \rightarrow m_1 - m_2 = -2m_1 \rightarrow m_2 = 3m_1$$

Σωστή η δ) επιλογή.

- ii) Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται στην Α σφαίρα, στη διάρκεια της κρούσης. Στην κατακόρυφη διεύθυνση, λαμβάνοντας υπόψη την κυκλική κίνηση που εκτελεί η σφαίρα Α, ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma F_y = m_1 \frac{v^2}{R} \rightarrow T - w_1 = m_1 \frac{v^2}{\ell}$$

Αλλά αφού $T = w_1$ άρα $v = 0$

Από την διατήρηση της ορμής ελάχιστα πριν την κρούση μέχρι τη στιγμή αυτή, μηδενισμού της ταχύτητας της Α σφαίρας παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\pi\rho} = \vec{P}_{\mu\epsilon\tau} \rightarrow m_1 v_1 = m_2 \cdot V \rightarrow V = \frac{1}{3} v_1 \quad (4)$$

Αλλά από την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για την κάθοδο της σφαίρας Α παίρνουμε:

$$U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} \rightarrow m_1 g H = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \rightarrow v_1^2 = 2 g H \quad (5)$$

Οπότε με βάση τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε

$$K_B = \frac{1}{2} m_2 V^2 = \frac{1}{2} 3m_1 \frac{1}{9} 2 g H = \frac{1}{3} m_1 g H$$

Σωστή η γ) επιλογή.

