Πλάγια ελαστική κρούση

Ας δούμε ξανά το θέμα Δ ($Δ_1$,$Δ_2$) των πρόσφατων επαναληπτικών εξετάσεων:

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο σφαίρα μάζας m_1=m=1kg, κινούμενη με ταχύτητα $υ = \frac{4}{3}\frac{m}{s}$, συγκρούεται ελαστικά αλλά όχι κεντρικά με δεύτερη όμοια σφαίρα μάζας m_2=m, που είναι αρχικά ακίνητη. Μετά την κρούση οι σφαίρες έχουν ταχύτητες μέτρων $υ_1$ και $υ_2 = \frac{υ_1}{\sqrt{3}}$, αντίστοιχα.

Δ1. Να βρείτε τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας $\overline{υ}_2$ με το διάνυσμα της ταχύτητας $\overline{υ}_1$.

Μονάδες 8

Δ2. Να υπολογίσετε τα μέτρα των ταχυτήτων $υ_1$ και $υ_2$.

Μονάδες 4

Η απάντηση που προφανώς αναμένεται, είναι η παρακάτω, όπως πολύ σωστά δόθηκε από το Νίκο Πριόβολο:

Εφαρμόζοντας Αρχή διατήρησης της ορμής για το μονωμένο σύστημα των σφαιρών έχουμε:

$$\Sigma \overrightarrow{F_{εξ}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{p_{αρχ}} = \overrightarrow{p_{τελ}} \Rightarrow p_{αρχ}^2 = p_{τελ}^2 \Rightarrow m^2 υ^2 = m^2 υ_1^2 + m^2 υ_2^2 + 2 m υ_1 m υ_2 συνφ$$

$$\Rightarrow υ^2 = υ_1^2 + υ_2^2 + 2υ_1 υ_2 συνφ \quad (1)$$

Επειδή η κρούση είναι ελαστική ισχύει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας:

$$E_{αρχ} + \underbrace{E_{προσφ}}_{0} - \underbrace{E_{απωλ}}_{0} = E_{τελ} \Rightarrow E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_1 = K_1' + K_2' \Rightarrow \frac{1}{2} m υ^2 = \frac{1}{2} m υ_1^2 + \frac{1}{2} m υ_2^2$$

$$\Rightarrow υ^2 = υ_1^2 + υ_2^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} υ_1^2 + υ_2^2 + 2υ_1 υ_2 συνφ = υ_1^2 + υ_2^2 \Rightarrow 2 \underbrace{υ_1 υ_2}_{\neq 0} συνφ = 0 \Rightarrow συνφ = 0 \Rightarrow φ = \frac{\pi}{2}\ .$$

Επομένως μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινηθούν κάθετα μεταξύ τους.

Δ2. Αφού $υ^2 = υ_1^2 + υ_2^2 \Rightarrow υ^2 = υ_1^2 + \frac{υ_1^2}{3} \Rightarrow υ^2 = \frac{4υ_1^2}{3} \Rightarrow υ_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} υ = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{4}{3}\frac{m}{s} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{m}{s}$ **και** $υ_2 = \frac{υ_1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\frac{m}{s}$

Η παραπάνω λύση στηρίζεται στον ορισμό της ελαστικής κρούσης. **Είναι η κρούση κατά την οποία η κινητική ενέργεια των σωμάτων πριν την κρούση, είναι ίση με την κινητική ενέργεια μετά την κρούση**.

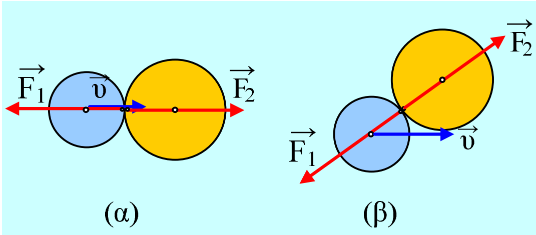
Στον παραπάνω ορισμό, δεν μας ενδιαφέρει ποιες ακριβώς δυνάμεις ασκεί το ένα σώμα στο άλλο, στη διάρκεια της κρούσης, ούτε τα έργα τους. Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με αρχή διατήρηση της ορμής, αφού οι δυνάμεις είναι εσωτερικές και με διατήρηση της κινητικής ενέργειας, εξ ορισμού.

Ας δούμε μια διαφορετική ματιά του ίδιου ερωτήματος.

Να ξεκινήσουμε λέγοντας κάποια πράγματα, που τα έχουμε ξαναδεί, με άλλες αφορμές. Η κρούση λέγεται ελαστική, αν οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των σωμάτων, είναι δυνάμεις ελαστικότητας, δυνάμεις που υπακούουν στο νόμο Hooke, συνεπώς συντηρητικές δυνάμεις, από όπου δικαιολογείται και η διατήρηση της μηχανικής ενέργειας.

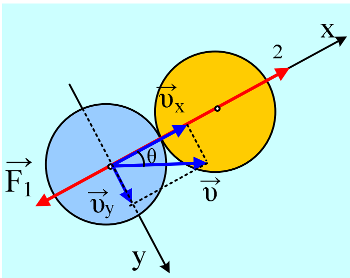
Ένα δεύτερο σημείο, που δεν αναφέρεται ή τουλάχιστον δεν αναφέρεται πολύ συχνά, είναι ότι στη διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται δυνάμεις παράλληλες στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων. **Δεν ασκείται**

δύναμη Τριβής. Να το πούμε με άλλα λόγια, αν η κρούση είναι κεντρική, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, ο φορέας των ασκούμενων δυνάμεων είναι πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα των δύο σφαιρών, σχήμα (α). Έτσι και αλλιώς δεν υφίσταται θέμα άσκησης εφαπτομενικής συνιστώσας δύναμης.



Αν όμως η κρούση είναι πλάγια, για να διατηρείται η κινητική ενέργεια στην κρούση ($K_{πριν}=K_{μετ}$), θα πρέπει οι ασκούμενες δυνάμεις να έχουν την διεύθυνση της διακέντρου, σχήμα (β). Η δύναμη δηλαδή F_1, που δέχεται η κινούμενη σφαίρα δεν είναι αντίθετη της ταχύτητας υ, αλλά κάθετη στην επιφάνεια επαφής. Αν δεν ίσχυε αυτό θα είχαμε δύο άλλα αποτελέσματα. Αφενός, η ασκούμενη τριβή θα μετέτρεπε κάποιο μέρος της μηχανικής ενέργειας σε θερμική, μέσω του έργου της τριβής ολίσθησης. Αφετέρου η τριβή αυτή θα παρουσίαζε και ροπή ως προς το κέντρο κάθε σφαίρας, με αποτέλεσμα οι σφαίρες μετά την κρούση να περιστρέφονται. Αλλά τότε ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας θα μετατρεπόταν σε περιστροφική κινητική ενέργεια των σφαιρών, με αποτέλεσμα οι τελικές ταχύτητες των κέντρων των δύο σφαιρών θα ήταν μικρότερες από αυτές που θα υπολογίζαμε, θεωρώντας τις σφαίρες υλικά σημεία. Και το θέμα είναι ότι δεν υπάρχουν πραγματικά σφαίρες υλικά σημεία, αλλά σφαίρες με ακτίνες και η παράλειψη της κινητικής ενέργειας οφειλόμενης σε περιστροφή, οδηγεί σε μεγαλύτερο ή μικρότερο σφάλμα.

Με βάση αυτά, ας δούμε μια εναλλακτική λύση στο ερώτημα των εξετάσεων.



Στο παραπάνω σχήμα έχει σχεδιαστεί η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας την οποία έχουμε αναλύσει σε δύο συνιστώσες, την υ_x στη διεύθυνση της διακέντρου και την υ_y σε κάθετη διεύθυνση. Αλλά αφού η δύναμη F_1 που δέχεται η πρώτη σφαίρα έχει την κατεύθυνση της υ_x, μόνο αυτήν την συνιστώσα ταχύτητας μπορεί να μεταβάλλει, ενώ η άλλη συνιστώσα (υ_y) δεν μπορεί να μεταβληθεί. Συνεπώς μετά την κρούση, η πρώτη σφαίρα θα έχει διατηρήσει την ταχύτητα υ_y, ενώ στην διεύθυνση x της διακέντρου, η περίπτωση παραπέμπει* στην μετωπική ελαστική κρούση, δύο σφαιρών με ίσες μάζες. Έτσι οι σφαίρες ανταλλάσσουν τις ταχύτητές τους, συνεπώς θα μηδενιστεί η ταχύτητα της πρώτης σφαίρας, ενώ η δεύτερη σφαίρα θα αποκτήσει ταχύτητα $\upsilon_2=\upsilon_x$.

Συμπέρασμα: η πρώτη σφαίρα θα κινηθεί στη διεύθυνση y, ενώ η δεύτερη στην διεύθυνση x, οπότε οι σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις.

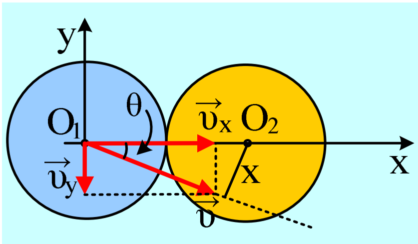
Εξάλλου για τα μέτρα των ταχυτήτων έχουμε:

υ₂=$\upsilon\ \sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}} = \frac{\upsilon\eta\mu\vartheta}{\sqrt{3}} \to \varepsilon\varphi\vartheta = \sqrt{3} \to \vartheta = 60^o$

Αλλά τότε $\eta\mu\vartheta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \to \upsilon_1 = \upsilon\eta\mu\vartheta = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} m/s = \frac{2\sqrt{3}}{3} m/s$

Και $\upsilon_2 = \upsilon_x = \frac{\upsilon_1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} m/s = \frac{2}{3} m/s$

Και με την ευκαιρία ας δούμε γενικότερα μια πλάγια κρούση μεταξύ δύο σφαιρών Α και Β, ίσων μαζών και ακτινών , όπου η δεύτερη είναι αρχικά ακίνητη.



Έστω ότι μια σφαίρα κέντρου O_1 και ακτίνας R κινούμενη με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και η οποία συγκρούεται ελαστικά με δεύτερη σφαίρα κέντρου O_2 και ακτίνας R, όπως στο σχήμα.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα που θα αποκτήσει η Β σφαίρα σε συνάρτηση με την απόσταση x του φορέα της ταχύτητας από το κέντρο της σφαίρας Β.

ii) Να βρεθούν οι τιμές της ταχύτητας της Α σφαίρας για τις διάφορες τιμές του x.

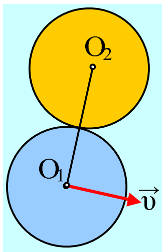
Απάντηση:

Με βάση όσα συζητήθηκαν παραπάνω, κρούση έχουμε εξαιτίας της συνιστώσας υ_x της ταχύτητας της Α σφαίρας, όπου:

$$\upsilon_x = \upsilon\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \upsilon\frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2R}$$

i) Η ταχύτητα της Β σφαίρας, με εφαρμογή των γνωστών εξισώσεων του βιβλίου, είναι:

$$\upsilon_2{}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_x = \frac{2m_1}{2m_1}\frac{\sqrt{4R^2 - x^2}}{2R}\upsilon = \upsilon_x$$



- Για x=0 έχουμε $\upsilon_2{}'=\upsilon_x=\upsilon$ η οποία είναι και η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να αποκτήσει, στην περίπτωση της κεντρικής ελαστικής κρούσης.
- Για x=2R τότε $\upsilon_2{}' = 0$

Η περίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην κατάσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, που η σφαίρα Α περνά εφαπτομενικά από την σφαίρα Β.

ii) Η ταχύτητα της Α σφαίρας μετά την κρούση είναι ίση με την συνιστώσα υ_x:

$$\upsilon_1' = \upsilon \cdot \eta\mu\theta = \upsilon \cdot \frac{x}{2R}$$

- Για x=0, παίρνουμε $\upsilon_1'=0$, η ελάχιστη ταχύτητα της Α σφαίρας, στην περίπτωση της μετωπικής ελαστικής κρούσης και
- Για x=2R, έχουμε $\upsilon_1'= \upsilon$, όπου στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών.

Σημείωση:

Επειδή οι σφαίρες δεν δέχονται δυνάμεις στον άξονα y (κάθετος στην διάκεντρο) η ταχύτητα κάθε σφαίρας στον άξονα αυτόν, παραμένει αμετάβλητη. Συνεπώς, $\upsilon_{1y}' = \upsilon_{1y}$ και $\upsilon_{2y}' = 0$

Θεωρώντας ότι η κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει αμετάβλητη παίρνουμε:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1(\upsilon_{1x}^2 + \upsilon_{1y}^2) = \frac{1}{2}m_1(\upsilon_{1x}'^2 + \upsilon_{1y}'^2) + \frac{1}{2}m_2(\upsilon_{2x}'^2 + \upsilon_{2y}'^2) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}^2 + \cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}^2} = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2 + \cancel{\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1y}'^2} + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2 + \overset{=0}{\cancel{\frac{1}{2}m_2\upsilon_{2y}'^2}}) \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_{1x}'^2 + \frac{1}{2}m_2\upsilon_{2x}'^2 \quad (\alpha)$$

Η εξίσωση (α) μαζί με την εξίσωση από την διατήρηση της ορμής στον άξονα x:

$$m_1 \cdot \upsilon_{1x} = m_1 \cdot \upsilon_{1x}' + m_2 \cdot \upsilon_{2x}' \quad (\beta)$$

αποτελούν ένα σύστημα (ίδιο με αυτό που προκύπτει στην μετωπική ελαστική κρούση) η λύση του οποίου μας δίνει $\upsilon_{1x}' = 0$ και $\upsilon_{2x}' = \upsilon_{1x}$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης