Ερωτήσεις στην περιστροφή στερεού σώματος – απαντήσεις

1) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι

$$\frac{dL}{dt} = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \Sigma\tau \ (1)$$

Αλλά P = Στ·ω και με βάση την (1)

$$P = \frac{dL}{dt} \cdot \omega \quad ή \quad P = \frac{dL}{dt} \cdot 2\pi f \quad ή \quad \mathbf{\frac{dL}{dt} = \frac{P}{2\pi f}} \ \text{και}$$

σωστή είναι η α

2) Επειδή το διάγραμμα ω – t είναι ευθεία γραμμή , η κλίση $\frac{d\omega}{dt} = \alpha_{\gamma\omega\nu}$ είναι σταθερή, άρα

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} = \sigma\tau\alpha\theta \text{ , οπότε } \frac{dL}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta \ \text{ και}$$

σωστή η γ

3) Είναι $K_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} I_{\alpha\rho\chi}\omega^2_{\alpha\rho\chi}$ και $K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} I_{\tau\varepsilon\lambda}\omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}$ άρα

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\tau\varepsilon\lambda}} = \frac{\frac{1}{2} I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega^2_{\alpha\rho\chi}}{\frac{1}{2} I_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot \omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}} \quad ή \quad \frac{K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\tau\varepsilon\lambda}} = \frac{\frac{2}{5} mR^2 \cdot \omega^2_{\alpha\rho\chi}}{\frac{2}{5} mr^2 \cdot \omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}} \quad ή$$

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\tau\varepsilon\lambda}} = \frac{n^2 r^2}{r^2} \cdot \frac{\omega^2_{\alpha\rho\chi}}{\omega^2_{\tau\varepsilon\lambda}} \quad ή \quad \frac{K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\tau\varepsilon\lambda}} = n^2 \cdot \left(\frac{\omega_{\alpha\rho\chi}}{\omega_{\tau\varepsilon\lambda}}\right)^2 \quad (1)$$

Κατά τη διάρκεια της ψύξης δεν επεμβαίνουν εξωτερικές ροπές . Άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής κι έχουμε ότι $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi} = I_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot \omega_{\tau\varepsilon\lambda}$ ή

$$\frac{2}{5} mR^2\omega_{\alpha\rho\chi} = \frac{2}{5} mr^2\omega_{\tau\varepsilon\lambda} \ ή \ r^2 n^2 \omega_{\alpha\rho\chi} = r^2 \omega_{\tau\varepsilon\lambda} \quad ή \quad \frac{\omega_{\alpha\rho\chi}}{\omega_{\tau\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{n^2} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

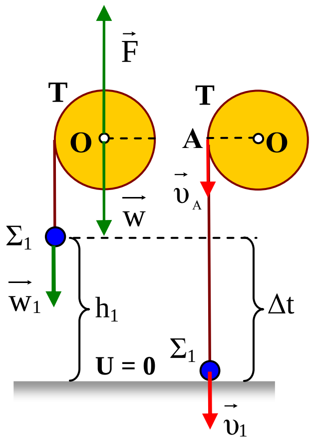
$$\frac{K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\tau\varepsilon\lambda}} = n^2 \cdot \frac{1}{n^4} \quad ή \quad \mathbf{\frac{K_{\alpha\rho\chi}}{K_{\tau\varepsilon\lambda}} = \frac{1}{n^2}} \quad \text{και}$$

σωστή η β

4) Στο σύστημα τροχαλία Τ σώμα Σ_1 , έχομε :

$$\frac{\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{L}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} \quad ή \quad \frac{\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} - \vec{L}_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} = \vec{\tau}_{w1} + \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_w \quad ή$$

$$\frac{m_1\upsilon_1 R + I_1\omega_1 - 0}{\Delta t} = m_1 gR + 0 + 0 \ ή \ m_1\upsilon_1 R + I_1\omega_1 = m_1 g \cdot (\Delta t) \ ή \quad m\upsilon_1 R + \frac{1}{2} 4mR^2\omega_1 = mg \cdot (\Delta t) \ ή$$



$\upsilon_1 R + 2(R\omega_1)R = g\cdot(\Delta t)$ κι επειδή το νήμα δεν γλιστρά και είναι μη εκτατό

$\upsilon_1 = \upsilon_A = \omega_1 \cdot R$ άρα

$\upsilon_1 R + 2\upsilon_1 R = g\cdot(\Delta t)$ ή $3\upsilon_1 R = g\cdot(\Delta t)$ ή $\upsilon_1 = \dfrac{g\cdot(\Delta t)}{3R}$ (1)

Ομοίως για το σύστημα στεφάνη σώμα Σ_2 προκύπτει

$m_2\upsilon_2 R + I_2\omega_2 = m_2 g\cdot(\Delta t)$ ή $m\upsilon_2 R + 4mR^2\omega_2 = mg\cdot(\Delta t)$ ή

$\upsilon_2 R + 4(R\omega_2)R = g\cdot(\Delta t)$ ή

$5\upsilon_2 R = g\cdot(\Delta t)$ ή $\upsilon_2 = \dfrac{g\cdot(\Delta t)}{5R}$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \dfrac{5}{3}$ (3)

Εξ άλλου με βάση την αρχή της διατήρησης της ενέργειας για τα συστήματά μας έχουμε

$$\left.\begin{aligned} mgh_1 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}4mR^2\omega_1^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 \\ &\text{και} \\ mgh_2 &= \frac{1}{2}\cdot 4mR^2\omega_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\upsilon_2=\omega_2 R]{\upsilon_1=\omega_1 R} \left.\begin{aligned} gh_1 &= \frac{3}{2}\upsilon_1^2 \\ gh_2 &= \frac{5}{2}\upsilon_2^2 \end{aligned}\right\} \text{ ή } \frac{h_1}{h_2} = \frac{3}{5}\left(\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^2 \quad (4)$$

από την (3) έχουμε ότι $\dfrac{3}{5} = \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}$ και η (4) γράφεται $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\upsilon_2}{\upsilon_1}\left(\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}\right)^2$ ή $\boldsymbol{\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}}$ οπότε

σωστή είναι η β.

5) Η κινητική ενέργεια της διπλής τροχαλίας είναι

$K = \dfrac{1}{2}M_{ολ}\upsilon_K^2 + \dfrac{1}{2}I_K\omega^2$ κι επειδή δεν ολισθαίνει $\upsilon_K = \omega\cdot R$ άρα

$K = \dfrac{1}{2}M_{ολ}\upsilon_K^2 + \dfrac{1}{2}I_K\dfrac{\upsilon_K^2}{R^2} = \dfrac{1}{2}\left(M_{ολ} + \dfrac{I_K}{R^2}\right)\upsilon_K^2 = \alpha\cdot\upsilon_K^2$ με $\alpha > 0$

Από την αρχή της διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι $W_{A,F} = K_A$ ή

$$F\cdot x_A = \alpha\cdot\upsilon_A^2 \quad (1) \text{ και}$$

$$F\cdot x_B = \alpha\cdot\upsilon_B^2 \quad (2)$$

Όμως είναι $x_A = x_1 + \Delta\ell_1$ όπου $\Delta\ell_1$, το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται καθώς περιστρέφεται η τροχαλί-α.

Επειδή το νήμα δεν γλιστρά πάνω στην τροχαλία, είναι $\Delta\ell_1 = \Delta S_1$ όπου ΔS_1, το μήκος του τόξου που δια-γράφει ένα σημείο της περιφέρειας, κι επειδή, δεν υπάρχει ολίσθηση πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, $\Delta S_1 = x_1$ άρα $\Delta\ell_1 = x_1$ και $x_A = 2\cdot x_1$ και η (1) γράφεται

$F\cdot 2\cdot x_1 = \alpha\cdot \upsilon_A^2$ (3)

Όμοια είναι $x_B = x_2+\Delta\ell_2$ (4) , όπου $\Delta\ell_2$, το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται όταν το νήμα είναι τυλιγμένο στη μικρή τροχαλία.

Αλλά $\Delta\ell_2 = N_2\cdot 2\pi r$ και $\Delta\ell_1 = N_1\cdot 2\pi R$ όπου N_1 , N_2 ο αριθμός των περιστροφών που έχουν διαγραφτεί.

Αλλά

$$\left.\begin{matrix} N_1 = \dfrac{x_1}{2\pi R} \\ N_2 = \dfrac{x_2}{2\pi R}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{x_1=x_2} N_1 = N_2 \text{ άρα } \Delta\ell_2 = \frac{x_1}{2\pi R}\cdot 2\pi r = \frac{x_1}{2r}\cdot r = \frac{x_1}{2}$$

έτσι η (4) γράφεται $\left. x_B = x_2 + \dfrac{x_1}{2}\right\} \xrightarrow{x_1=x_2} x_B = \dfrac{3x_1}{2}$

Τώρα η (2) γράφεται έτσι

$$F\cdot\frac{3x_1}{2} = \alpha\cdot\upsilon_B^2 \quad (5)$$

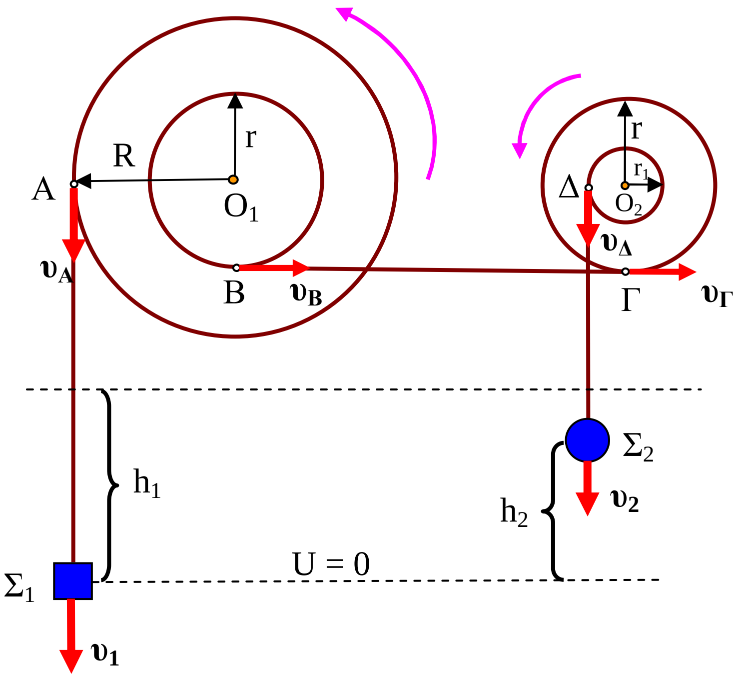
Από τις (3) και (5) με διαίρεση παίρνουμε

$$\left(\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A}\right)^2 = \frac{F\frac{3}{2}x_1}{F\cdot 2x_1} = \frac{3}{4} \text{ άρα } \boldsymbol{\frac{\upsilon_B}{\upsilon_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{οπότε}$$

σωστή είναι η β.

6) Έστω μια χρονική στιγμή, που τα σώματα Σ_1 , Σ_2 έχουν ταχύτητες $\boldsymbol{\upsilon_1}$, $\boldsymbol{\upsilon_2}$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

Λόγω του ότι τα νήματα δεν γλιστράνε και παραμένουν διαρκώς τεντωμένα , θα είναι



$$\upsilon_1 = \upsilon_A = \omega_1 R \quad (1)$$

$$\upsilon_B = \upsilon_\Gamma \text{ ή } \omega_1 r = \omega_2 r \text{ άρα } \omega_1 = \omega_2 = \omega \ (2)$$

$$\upsilon_\Delta = \upsilon_2 \text{ ή } \upsilon_2 = \omega r_1 \ (3)$$

Με βάση την Αρχή διατήρη5ης της ενέργειας έχουμε ότι

$$M_1 g h_1 + M_2 g h_1 - M_2 g h_2 = K_{T1} + K_{T2} + K_{\Sigma 1} + K_{\Sigma 2} \ (4)$$

όπου K_{T1} , K_{T2} είναι οι κινητικές ενέργειες των τροχαλιών T_1 , T_2 αντίστοιχα και $K_{\Sigma 1}$, $K_{\Sigma 2}$ οι κινητικές ενέργειας των σωμάτων Σ_1 , Σ_2 .

Η (4) γράφεται έτσι

$$\Delta U = K_{T1} + K_{T2} + K_{\Sigma 1} + K_{\Sigma 2} \ (5)$$

Αλλά

$$\frac{K_{T2}}{K_{T1}} = \frac{\frac{1}{2} I_2 \omega_2^2}{\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2} \text{ και με βάση την (2) και τα δεδομένα}$$

$$\frac{K_{T2}}{K_{T1}} = \frac{I_2 \omega^2}{3 I_2 \omega^2} = \frac{1}{3} \text{ ή } \frac{K_{T2} + K_{T1}}{K_{T1}} = \frac{4}{3} \text{ ή } K_{T2} + K_{T1} = \frac{4}{3} K_{T1} \ (6)$$

και $\dfrac{K_{\Sigma 2}}{K_{\Sigma 1}} = \dfrac{\frac{1}{2} M_2 \upsilon_2^2}{\frac{1}{2} M_1 \upsilon_1^2}$ οπότε με βάση τις (1) ,(2) , (3) και τα δεδομένα έχομε ότι

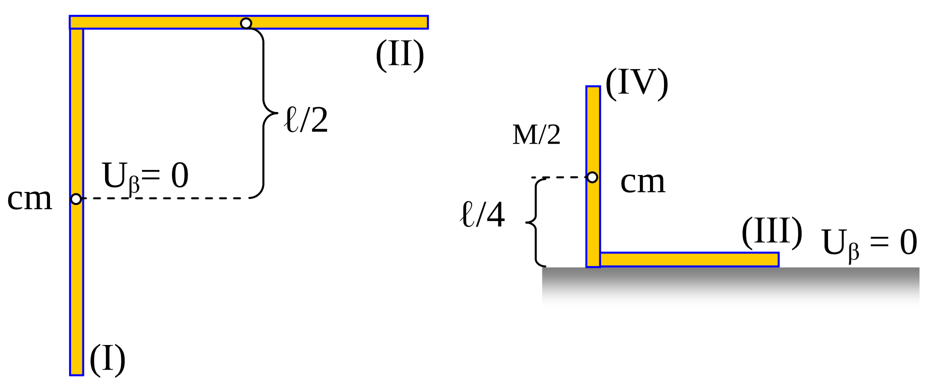
$$\frac{K_{\Sigma 2}}{K_{\Sigma 1}} = \frac{3M_1}{M_1}\left(\frac{\omega r}{\omega 3 r}\right)^2 = \frac{1}{3} \text{ ή } \frac{K_{\Sigma 1} + K_{\Sigma 2}}{K_{\Sigma 1}} = \frac{4}{3} \text{ ή } K_{\Sigma 1} + K_{\Sigma 2} = \frac{4}{3} K_{\Sigma 1} \ (7)$$

Η (5) με βάση τις (6) και (7) γράφεται έτσι

$\Delta U = \dfrac{4}{3}\left(K_{T1} + K_{\Sigma 1}\right)$ ή $K_{T1} + K_{\Sigma 1} = \dfrac{3}{4}\Delta U = \dfrac{\mathbf{75}}{\mathbf{100}} \mathbf{\Delta U = 75\% \Delta U}$ και

σωστή είναι η γ

7) Εφαρμόζουμε την αρχή της διατήρησης της ενέργειας για τη ράβδο από την κατακόρυφη θέση (Ι) μέχρι την οριζόντια θέση (ΙΙ) κι έχουμε



$$W = K_{II} + U_{II} = K_{II} + Mg\ell/2 \text{ ή } W_{min} = 0 + Mg\ell/2 \text{ ή } E = Mg\ell/2 \ (1)$$

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή της διατήρησης της ενέργειας, για καθένα από τα μισαδάκια που προκύπτουν μετά τους διαδοχικούς τεμαχισμούς, από την οριζόντια θέση (ΙΙΙ) μέχρι την κατακόρυφη θέση (IV), κι έχουμε

Για το 1ο κομμάτι μήκους $\ell/2$ και μάζας Μ/2 :

$$W_1 = \frac{M}{2} g \frac{\ell}{4} + K_{IV} \text{ ή } W_{1,min} = \frac{M}{2} g \frac{\ell}{4} + 0 \text{ ή } E_1 = \frac{1}{4}\frac{Mg\ell}{2} = \frac{E}{4} = \frac{E}{2^{2\cdot 1}}$$

Για το 2ο κομμάτι μήκους $\ell/4$ και μάζας Μ/4 :

$$W_2 = \frac{M}{4} g \frac{\ell}{8} + K_{IV} \text{ ή } W_{2,min} = \frac{M}{4} g \frac{\ell}{8} + 0 \text{ ή } E_2 = \frac{1}{16}\frac{Mg\ell}{2} = \frac{E}{16} = \frac{E}{2^4} = \frac{E}{2^{2\cdot 2}}$$

Για το 3ο κομμάτι μήκους $\ell/8$ και μάζας Μ/8 :

$$W_3 = \frac{M}{8} g \frac{\ell}{16} + K_{IV} \text{ ή } W_{3,min} = \frac{M}{8} g \frac{\ell}{16} + 0 \text{ ή } E_3 = \frac{1}{64}\frac{Mg\ell}{2} = \frac{E}{64} = \frac{E}{2^6} = \frac{E}{2^{2\cdot 3}}$$

Για το 4ο κομμάτι μήκους $\ell/16$ και μάζας Μ/16 :

$$W_4 = \frac{M}{16} g \frac{\ell}{32} + K_{IV} \text{ ή } W_{4,min} = \frac{M}{16} g \frac{\ell}{32} + 0 \text{ ή } E_4 = \frac{1}{256}\frac{Mg\ell}{2} = \frac{E}{256} = \frac{E}{2^8} = \frac{E}{2^{2\cdot 4}}$$

Για το N^o κομμάτι μήκους $\frac{\ell}{2^N}$ και μάζας $\frac{M}{2^N}$

$$W_N = \frac{M}{2^N} g \cdot \frac{1}{2}\frac{\ell}{2^N} + K_{IV} \text{ ή } W_{N,min} = \frac{M}{2^N} g \cdot \frac{1}{2}\frac{\ell}{2^N} + 0 \text{ ή } W_{N,min} = \frac{Mg\ell}{2}\frac{1}{2^N}\cdot\frac{1}{2^N} = \frac{E}{2^{2N}} \text{ άρα}$$

$$\mathbf{E_N = \frac{E}{2^{2N}}}$$

και σωστή είναι η γ

8) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου Σ_1 θα είναι $\frac{dL_1}{dt} = m_1\ell^2\cdot\alpha_{γων}$, όπου $\alpha_{γων}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος στη νέα θέση.

και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σφαιριδίου Σ_2 θα είναι $\frac{dL_2}{dt} = m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\cdot\alpha_{γων} = m_2\frac{\ell^2}{4}\cdot\alpha_{γων}$

Αλλά επειδή τα σφαιρίδια είναι όμοια $m_1 = m_2$ άρα

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{1}{4}m_1\ell^2\alpha_{γων} = \frac{1}{4}\left(\frac{dL_1}{dt}\right) \text{ ή } \mathbf{\frac{dL_1}{dt} = 4\frac{dL_2}{dt}}$$

και σωστή είναι η δ.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης