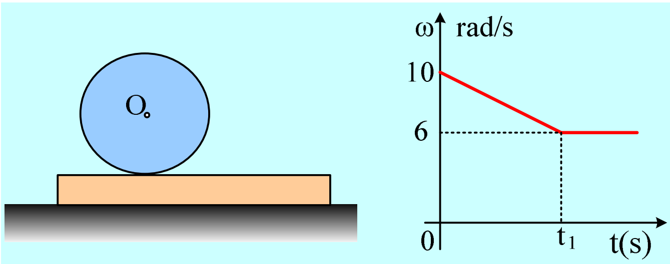
Ένας κύλινδρος με αρχική γωνιακή ταχύτητα πάνω σε σανίδα.

Ένας κύλινδρος μάζας M=40kg και ακτίνας R=1m ο οποίος στρέφεται δεξιόστροφα γύρω από τον άξονά του ο οποίος συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεών του, αφήνεται τη χρονική στιγμή t=0, πάνω σε μια σανίδα, η οποία ηρεμεί πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο. Μεταξύ κυλίνδρου και σανίδας υπάρχει τριβή, με αποτέλεσμα η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου να μεταβάλλεται όπως στο διάγραμμα (θεωρούμε θετική την γωνιακή του ταχύτητα).



i) Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και στη σανίδα.

ii) Τι αποτέλεσμα έχει η τριβή που ασκείται στον κύλινδρο; Πώς επηρεάζει τη γωνιακή και πώς την ταχύτητα του κέντρου μάζας Ο; Ποιο το αποτέλεσμα της δράσης της τριβής πάνω στη σανίδα;

iii) Γιατί τη χρονική στιγμή t_1 η γωνιακή ταχύτητα σταθεροποιείται; Τι συμβαίνει με την ταχύτητα ενός σημείου Α επαφής του κυλίνδρου με τη σανίδα τη στιγμή t_1;

iv) Να υπολογιστεί η μάζα της σανίδας.

v) Να βρεθεί ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ σανίδας και κυλίνδρου αν t_1=1s.

vi) Σε μια στιγμή t_2 η σανίδα κινείται με ταχύτητα μέτρου $υ_2$=3m/s. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:

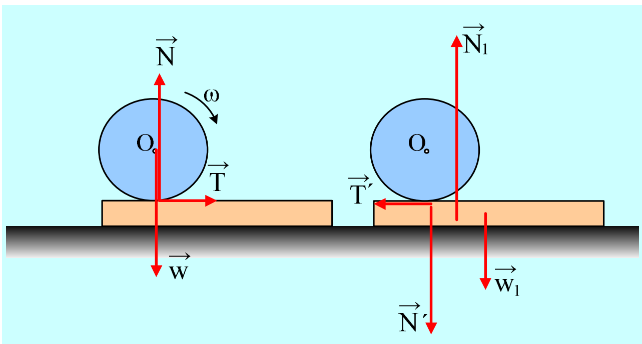
α) Με ποιο ρυθμό μειώνεται η περιστροφική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου.

β) Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου και της σανίδας.

γ) Με ποιο ρυθμό η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= \frac{1}{2} MR^2$.

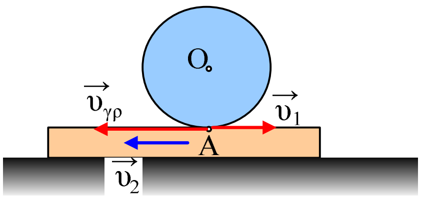
Απάντηση:



Στο παραπάνω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις, αριστερά που ασκούνται στον κύλινδρο και δεξιά οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα, όπου N΄ η αντίδραση της N και N_1 η αντίδραση του εδάφους πάνω στη σανίδα.

i) Η ροπή της τριβής που ασκείται στον κύλινδρο, επιβραδύνει την στροφική του κίνηση, ενώ ταυτόχρονα η τριβή επιταχύνει τον κύλινδρο προς τα δεξιά. Αντίθετα η αντίδρασή της Τ΄ που ασκείται στη σανίδα επιταχύνει τη σανίδα προς τα αριστερά.

ii) Έστω ένα σημείο Α επαφής του κυλίνδρου με τη σανίδα. Το σημείο Ε έχει μια ταχύτητα υ_1 προς τα δεξιά, ίση με την ταχύτητα του άξονα, λόγω μεταφορικής κίνησης και μια γραμμική ταχύτητα προς τ' αριστερά $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$, εξαιτίας της στροφικής κίνησης. Τη στιγμή που η συνολική ταχύτητα του Α $\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_1$ θα έχει κατεύθυνση προς τ' αριστερά και θα γίνει ίση με την ταχύτητα υ_2 που έχει αποκτήσει η σανίδα, δεν θα υπάρχει ταχύτητα του Α ως προς τη σανίδα, με αποτέλεσμα αφού δεν υπάρχει ολίσθηση, να μην ασκείται πλέον και τριβή μεταξύ των σωμάτων. Από εκεί και πέρα ο κύλινδρος διατηρεί μια σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας προς τα δεξιά, ενώ στρέφεται επίσης με σταθερή γωνιακή ταχύτητα 6rad/s δεξιόστροφα, ενώ η σανίδα κινείται με σταθερή ταχύτητα προς τ' αριστερά. Ας κρατήσουμε τη συνθήκη για τα μέτρα των ταχυτήτων:



$$\upsilon_2=\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\upsilon_2=\omega R-\upsilon_1 \quad (1)$$

iii) Για το σύστημα κύλινδρος – σανίδα ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής, αφού είναι μονωμένο:

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi}=\vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$0=M\upsilon_1-m\upsilon_2 \quad (2)$$

Αλλά ισχύει και η αρχή διατήρησης της στροφορμής ως προς τον άξονα του κυλίνδρου αφού δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές που να μεταβάλουν τη συνολική στροφορμή:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$I\omega_0=I\cdot\omega+m\upsilon_2\cdot R \rightarrow$$

$$½\, M\cdot R^2\cdot\omega_0=½\, M\cdot R^2\cdot\omega + m\upsilon_2\cdot R \rightarrow$$

$$M(\omega_0-\omega)\cdot R=2m\upsilon_2$$

Και λόγω της (2):

$$M(\omega_0-\omega)\cdot R=2M\upsilon_1 \rightarrow$$

$$\upsilon_1=½\cdot(\omega_0-\omega)\cdot R=½\cdot(10-6)\cdot 1m/s=2m/s$$

αλλά από τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_2=\omega R-\upsilon_1=6m/s-2m/s=4m/s$$

Επιστρέφοντας στην (2) έχουμε:

$$m=M\cdot\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}=40\frac{2}{4}kg=20kg$$

iv) Για τη γωνιακή επιτάχυνση έχουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{d\omega}{dt}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{6-10}{1}rad/s^2=-4rad/s^2$$

Η γωνιακή επιτάχυνση βρέθηκε αρνητική, πράγμα που σημαίνει ότι είναι κάθετη στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα έξω, αντίθετης κατεύθυνσης από τη γωνιακή ταχύτητα, την οποία θεωρήσαμε θετική.

Αλλά από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$-T\cdot R = ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T = -½\, MR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} = 80N.$$

Αλλά για τον κύλινδρο $\Sigma F_y=0$ ή $N=Mg$, οπότε:

$$T=\mu\cdot N = \mu\cdot Mg \rightarrow$$

$$\mu = \frac{T}{Mg} = 0{,}2$$

v) α) Ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{dK_\pi}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega$$

Θεωρώντας ξανά θετικές τις δεξιόστροφες ροπές έχουμε:

$$\frac{dK_\pi}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega = -T\cdot R\cdot\omega$$

Αλλά από τη διατήρηση της στροφορμής έχουμε ξανά:

$$\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$I\omega_0 = I\cdot\omega + m\upsilon_2\cdot R \rightarrow$$

$$\omega = \frac{MR\omega_0 - 2m\upsilon_2}{MR}$$

και με αντικατάσταση ω=7rad/s, άρα:

$$\frac{dK_\pi}{dt} = \Sigma\tau\cdot\omega = -T\cdot R\cdot\omega = -80\cdot 1\cdot 7J/s = -560J/s$$

β) Από τη διατήρηση της ορμής παίρνουμε:

$$\vec{P}_{\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$0 = M\upsilon_1 - m\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 1{,}5m/s$$

Οπότε οι ζητούμενοι ρυθμοί είναι:

$$\frac{dK_\mu}{dt} = T\cdot\upsilon_1 = 80\cdot 1{,}5J/s = 120J/s$$

και

$$\frac{dK_{\sigma\alpha\nu}}{dt} = T'\cdot\upsilon_2 = 80\cdot 3J/s = 240J/s$$

γ) Από τη διατήρηση της ενέργειας, αφού η τριβή μειώνει τη περιστροφική κινητική ενέργεια κατά 560J/s, ενώ αυξάνει τη μεταφορική κατά 120J/s, δίνοντας και 240J/s στη ράβδο, ο ρυθμός μετατροπής σε θερμική ενέργεια θα είναι:

$$dQ/dt=(560-120-240)J/s=200J/s.$$

Σχόλιο:

1) Σε όλες τις αρχές και τους νόμους που εφαρμόσαμε, χρησιμοποιήσαμε ταχύτητες, γωνιακή ταχύτητα, ορμές και στροφορμές όπως υπολογίζονται ως προς το ακίνητο λείο οριζόντιο επίπεδο.

2) Την στιγμή t_2 το σημείο Α εφαρμογής της τριβής, έχει ταχύτητα:

$$υ_Α= ωR-υ_1=7m/s-1,5m/s=5,5m/s$$

με φορά προς τα αριστερά, ενώ η σανίδα έχει ταχύτητα $υ_2$=3m/s, επίσης προς τα αριστερά.

Κατά συνέπεια το σημείο Α έχει ως προς τη σανίδα ταχύτητα:

$$υ_Α΄= 5,5m/s-3m/s=2,5m/s.$$

Η ισχύς της τριβής για την ολίσθηση του ενός σώματος ως προς το άλλο είναι:

$$P_Τ= Τ·υ_Α΄·συν180°= - 80·2,5W=-200W$$

Συνεπώς ο ρυθμός με τον οποίο η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική, είναι ίσος με 200J/s.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης