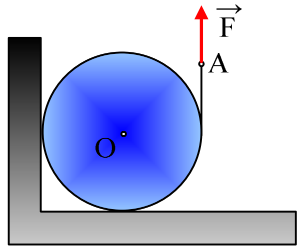
Ο κύλινδρος επιταχύνεται σε επαφή με τοίχο.

Ο κύλινδρος του σχήματος έχει μάζα 30kg και ακτίνα 0,5m, εφάπτεται σε λείο κατακόρυφο τοίχο, ενώ εμφανίζει με το έδαφος συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,5$. Τυλίγουμε γύρω του αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου για t=0 ασκούμε κατακόρυφη μεταβλητή δύναμη **F** το μέτρο της οποίας αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 4N/s, ξεκινώντας από την τιμή μηδέν.



i) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει ο κύλινδρος να στρέφεται και ποια στιγμή θα χάσει την επαφή με το έδαφος.

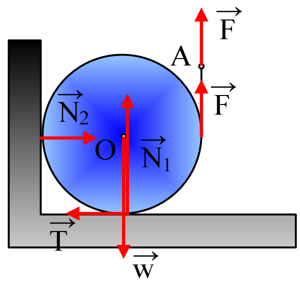
ii) Με ποιο ρυθμό η δύναμη **F** προσφέρει ενέργεια στον κύλινδρο τη χρονική στιγμή t_1=35s και με ποιο ρυθμό ένα μέρος της ενέργειας αυτής μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής;

iii) Να βρεθεί η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, ως προς τον άξονα περιστροφής του κυλίνδρου, τη χρονική στιγμή t_2=80s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I=½\,mR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο εμφανίζονται στο σχήμα, όπου N_1 η κάθετη αντίδραση από το οριζόντιο επίπεδο και N_2 η αντίστοιχη από τον τοίχο, ενώ T είναι η δύναμη της τριβής από το μη λείο οριζόντιο επίπεδο. Το βάρος του και η δύναμη **F** που ασκείται μέσω του νήματος.



Ο κύλινδρος αρχίζει να στρέφεται όταν η τριβή μεταβληθεί από στατική σε τριβή ολίσθησης. Για όσο χρόνο ο κύλινδρος βρίσκεται σε επαφή με το έδαφος:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow$$

$$N_1+F-w=0 \rightarrow$$

$$N_1=mg-F=(300-4t)\ N\ (1)$$

Ενώ τη στιγμή που αρχίζει να στρέφεται η ροπή της F γίνεται μεγαλύτερη από την ροπή της τριβής ολίσθησης, ως προς τον άξονα του κυλίνδρου.

$$F\cdot R>T\cdot R \rightarrow 4t>\mu\cdot N_1 \rightarrow 4t>\mu(300-4t) \rightarrow 6t>150 \rightarrow$$

$$t>25s$$

Δηλαδή μέχρι την χρονική στιγμή t=25s ο κύλινδρος ισορροπεί ενώ κατόπιν αρχίζει να στρέφεται γύρω από τον άξονά του.

Εξάλλου ο κύλινδρος θα χάσει την επαφή με το έδαφος τη στιγμή που η κάθετη αντίδραση του επιπέδου θα μηδενιστεί και από την (1) έχουμε:

$$300-4t=0 \rightarrow t=75s.$$

ii) Από τον 2° νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση παίρνουμε για το χρονικό διάστημα που ο κύλινδρος στρέφεται σε επαφή με το έδαφος, δηλαδή για tQ25s:

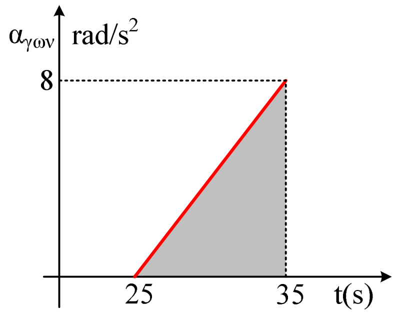
$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F\cdot R - T\cdot R = ½\, mR^2\cdot α_{γων} \rightarrow$$

$$4t - μ(300-4t) = ½\, mR\cdot α_{γων} \rightarrow$$

$$a_{γων} = \frac{2(6t-150)}{mR} = \frac{12t-300}{15} = 0{,}8t - 20 \quad (\text{rad/s}^2)$$

Παίρνουμε την γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο από t=25s έως τη στιγμή t_1= 35s.



Το εμβαδόν του γκρι τριγώνου μας δίνει την γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή t_1=35s:

$$\frac{dω}{dt} = a_{γων} \rightarrow dω = a_{γων}\cdot dt$$

και αφού $ω_{αρχ}$=0 έχουμε:

ω= ½ 10·8 rad/s= 40rad/s.

Ενώ για t_1= 35s έχουμε:

F=4·35N=140N και

T= μN=0,5·(300-140)N=80N

Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρει ενέργεια στον κύλινδρο η δύναμη F είναι:

$$\frac{dW}{dt} = P = τ_F\cdot ω = FRω$$

και με αντικατάσταση

$$\frac{dW}{dt} = 2800 \text{J/s}$$

$$\text{ενώ} \quad \frac{dQ}{dt} = |W_T| = |-τω| = TRω$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{dQ}{dt} = 1600 \text{J/s}$$

iii) Από την γενικευμένη μορφή του $2^{ου}$ νόμου του Νεύτωνα έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = Στ \rightarrow dL = (Στ)dt$$

Κάνουμε το διάγραμμα της ροπής που ασκείται στον κύλινδρο σε συνάρτηση με το χρόνο.

Από 0-25s Στ=0,

από 25s-75s έχουμε:

$$\Sigma\tau = F\cdot R - T\cdot R = (F-T)\cdot R \text{ ή}$$

$$\Sigma\tau = [4t - \mu(300-4t)]\cdot R = (6t-150)\cdot \tfrac{1}{2} = 3t-75 \qquad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$

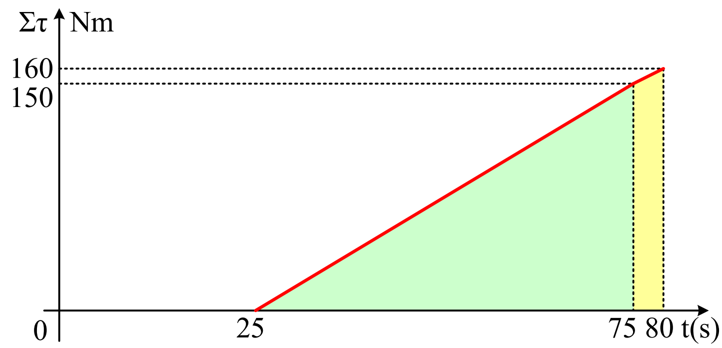
Και για t=75s παίρνουμε Στ= 150 N·m

Για t>75s η μόνη ροπή είναι αυτή της δύναμης, συνεπώς:

$$\Sigma\tau = F\cdot R = 4t\cdot \tfrac{1}{2} = 2t \quad \text{(S.I.)}$$

Και για t=80s έχουμε Στ= 160 N·m

Με βάση τα προηγούμενα το διάγραμμα της ροπής σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Υπολογίζοντας το εμβαδόν του τριγώνου και του τραπεζίου (με κίτρινο χρώμα) βρίσκουμε την μεταβολή της στροφορμής του κυλίνδρου:

ΔL= ½ 50·150 kg·m^2/s + ½ (160+150)·5 kg·m^2/s= 4.525 kg·m^2/s.

Αρχικά όμως ο κύλινδρος ηρεμούσε και $L_{αρχ}$=0, οπότε $\Delta L = L_{τελ} - L_{αρχ} \rightarrow$

$$L_{τελ} = 4.525 \text{ kg}\cdot m^2/s.$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής είναι:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = F\cdot R = 4t\cdot R$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{dL}{dt} = 160 kg\cdot m^2/s^2.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης