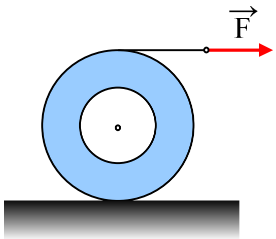
Ένας κοίλος κύλινδρος.



Δίνεται ένας κύλινδρος ακτίνας R=1m από τον οποίο έχει αφαιρεθεί ένας ομοαξονικός κύλινδρος ακτίνας r=R/2. Ο κοίλος αυτός κύλινδρος (στερεό Κ) έχει μάζα m= 40kg.

i) Αν δίνεται η ροπή αδράνειας ενός κυλίνδρου ως προς τον άξονα που συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεών του $I= ½ MR^2$, να υπολογισθεί η ροπή αδράνειας του στερεού Κ.

ii) Γύρω από το στερεό Κ έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα, στο άκρο του οποίου ασκούμε σταθερή οριζόντια δύναμη F=26Ν. Αν το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο όπως στο σχήμα, να βρείτε:

α) Το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του στερεού Κ, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

β) Το λόγο της περιστροφικής προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια του στερεού.

γ) Τη μετατόπιση του άξονα περιστροφής του στερεού, τη στιγμή που το στερεό έχει κινητική ενέργεια 130J.

Απάντηση:

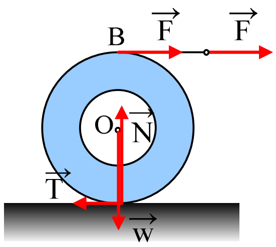
i) Ας φανταστούμε πλήρη τον κύλινδρο ο οποίος έχει μάζα Μ και ύψος h, ενώ είναι κατασκευασμένος από υλικό πυκνότητας ρ. Τότε για τον κύλινδρο ακτίνας R έχουμε $M=ρ·π R^2·h$ ενώ για τη μάζα του κυλίνδρου ακτίνας r θα έχουμε $m_1= ρ·πr^2·h$, αντίστοιχα. Με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{m_1}{M}=\frac{1}{4} \rightarrow m_1=0{,}25M \text{ και } m+m_1=M \rightarrow m=\frac{3}{4}M \text{ ή } M=\frac{4}{3}m \text{ και } m_1=\frac{1}{3}m .$$

Αν I_1 η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ακτίνας r και Ι η ροπή αδράνειας του κοίλου κυλίνδρου, τότε $I_1+I=I_κ$

$$I= ½ MR^2 – ½ m_1r^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{3}m\cdot R^2-\frac{1}{2}\frac{1}{3}m\frac{R^2}{4}=\frac{5}{8}mR^2$$

Και με αντικατάσταση $I=25kg·m^2$.



ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό, όπου έστω ότι η τριβή είναι προς τα αριστερά, ενώ μέσω του νήματος ασκούμε στο στερεό την δύναμη F, στο σημείο Β. Το στερεό θα εκτελέσει μια σύνθετη κίνηση, η οποία θεωρούμε ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από τον άξονα του κυλίνδρου που συνδέει τα κέντρα των δύο βάσεων.

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για κάθε επιμέρους κίνηση. Για την μεταφορική:

$$ΣF=m·α_{cm} \rightarrow F-T=m·α_{cm} \ (1)$$

Για την στροφική κίνηση και θεωρώντας θετική φορά την φορά που στρέφονται οι δείκτες του ρολογιού:

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot R + T \cdot R = \frac{5}{8} mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή}$$

$$F + T = \frac{5}{8} m \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Εφόσον $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ αφού έχουμε κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$2F = \frac{13}{8} ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{16}{13} \frac{F}{m} = \frac{16 \cdot 26}{13 \cdot 40} m/s^2 = 0{,}8 m/s^2$$

Και με αντικατάσταση στην (2) $T = \frac{5}{8} m \cdot a_{cm} - F = \frac{5}{8} 40 \cdot 0{,}8N - 26N = -6N$

Το αρνητικό αποτέλεσμα μας λέει ότι η τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, είναι δηλαδή ομόρροπη της α-σκούμενης δύναμης F.

α) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau = F \cdot R - T \cdot R = 20 kg \cdot m^2 / s^2$$

Με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα μέσα στο σχήμα.

β) Για το λόγο των κινητικών ενεργειών έχουμε:

$$\frac{K_\pi}{K_\mu} = \frac{\frac{1}{2} I\omega^2}{\frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2} = \frac{\frac{5}{8} mR^2\omega^2}{m\upsilon_{cm}^2} = \frac{5}{8} \frac{(\omega R)^2}{\upsilon_{cm}^2} = \frac{5}{8}$$

γ) Με βάση την παραπάνω σχέση, όταν K=130J θα έχουμε:

$$K_\mu + K_\pi = 130 \text{ ή } K_\mu + 5/8\, K_\mu = 130 \text{ ή } K_\mu = 80J$$

Αλλά εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε, για τη μεταφορική κίνηση παίρνουμε:

$$K_\tau - K_\alpha = F \cdot x + T \cdot x \text{ ή}$$

$$x = \frac{K_\mu}{F + T} = \frac{80}{26 + 6} m = 2{,}5m$$

Σχόλιο:

Η ασκούμενη τριβή είναι στατική, αφού έχουμε σαν δεδομένο ότι το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, συνεπώς το έργο της είναι μηδέν. Η ολική κινητική ενέργεια που απέκτησε το στερεό, είναι ίση λοιπόν με την ενέργεια που προσφέρθηκε στο στερεό μέσω του έργου της δύναμης F:

$$K_{o\lambda} = W_F = F \cdot x_1 \rightarrow x_1 = \frac{K_{o\lambda}}{F} = \frac{130}{26} m = 5m$$

Όπου x_1 η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δύναμης, η οποία είναι ίση και με την μετατόπιση του σημείου Β. Όμως το σημείο αυτό έχει κάθε στιγμή διπλάσια ταχύτητα, διπλάσια επιτάχυνση και θα έχει και διπλάσια μετατόπιση από το κέντρο Ο, άρα x_o=2,5m.

Βέβαια στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε λέγοντας ότι το έργο της F, είναι το άθροισμα των έργων για τη μεταφορική και στροφική κίνηση, δηλαδή:

$$K_{ολ}=W_{Fμετ}+W_{τF,στ}= F\cdot x+F\cdot R\cdot θ = 2F\cdot x \text{ ή } x=2,5m.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης