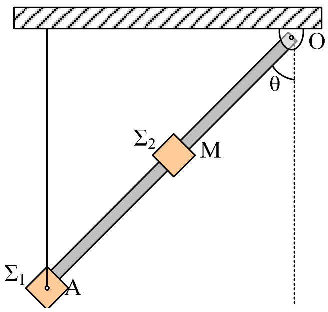
Ακροβατώντας μεταξύ στερεού και συστήματος σωμάτων.



Η ομογενής ράβδος του σχήματος, μάζας Μ=3kg και μήκους ℓ=2m, συνδέεται σε άρθρωση, οπότε μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από το άκρον της Ο. Πάνω στη ράβδο, στο άκρο της Α και στο μέσον της Μ, έχουν προσδεθεί δύο σώματα Σ_1 και Σ_2, τα οποία θεωρούνται υλικά σημεία με μάζες $m_1=m_2=m=1kg$. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο επίσης στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου νήματος, οπότε η ράβδος σχηματίζει γωνία θ=30° με την κατακόρυφο.

i) Να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκεί η ράβδος στα δυο σώματα Σ_1 και Σ_2 και να υπολογιστούν τα μέτρα τους.

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Για αμέσως μετά:

α) Να βρεθούν οι επιταχύνσεις των σωμάτων Σ_1 και Σ_2.

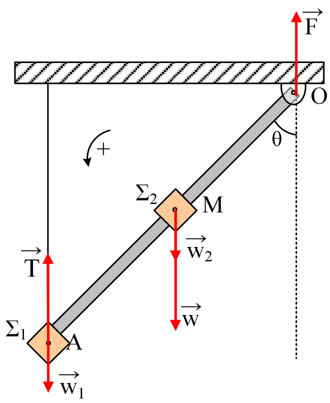
β) Να υπολογιστούν οι ροπές που δέχεται η ράβδος από κάθε σώμα.

γ) Ποιες οι απαντήσεις στα παραπάνω υποερωτήματα αν για τη ράβδο Μ→0, αν δηλαδή η ράβδος θεωρηθεί αβαρής;

iii) Να βρεθεί το έργο της δύναμης που ασκεί η ράβδος στο σώμα Σ_1 κατά την κίνησή του, μέχρι να φτάσει στην κατακόρυφη θέση.

Δίνεται $g=10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I= 1/3\, M\ell^2$.

Απάντηση:



i) Το σύστημα ράβδος $-\Sigma_1 -\Sigma_2$ μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα στερεό Σ, το οποίο ισορροπεί, οπότε από τη συνθήκη ισορροπίας του παίρνουμε:

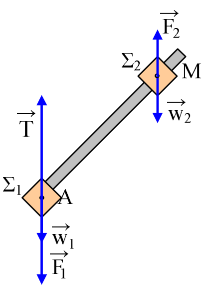
$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \quad (1) \\ \Sigma F_y=0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau=0 \quad (3)$$

Από την εξίσωση (3) παίρνοντας τις ροπές ως προς το άκρο Ο έχουμε:

$$w_1\cdot\ell\cdot\eta\mu\theta - T\cdot\ell\cdot\eta\mu\theta + w\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell\cdot\eta\mu\theta + w_2\cdot \tfrac{1}{2}\,\ell\cdot\eta\mu\theta = 0 \text{ ή}$$

$$T = w_1 + \frac{w+w_2}{2} = 10N + \frac{30N+10N}{2} = 30N$$



Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε ένα από τα σώματα Σ_1- Σ_2. Τα σώματα ισορροπούν άρα $\Sigma\vec{F}=0$. Έτσι:

Για το Σ_1, ΣF=0 ή $T-w_1-F_1=0$ ή $F_1=30N-10N=20N$, με φορά προς τα κάτω, ενώ για το Σ_2, ΣF=0 ή $F_2-w_2=0$ ή $F_2=w_2=10N$, με φορά προς τα πάνω.

ii) Κόβοντας το νήμα, οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό είναι αυτές που έχουν σχεδιαστεί στο πρώτο σχήμα (πλην της τάσης του νήματος). Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για το στερεό Σ, θεωρώντας θετική φορά την αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, παίρνουμε:

$$Στ=I_o \cdot α_{γων}$$

Όπου $I_o= I_ρ+m_1 \cdot \ell^2 + m_2 \cdot \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3}M\ell^2 + \frac{5}{4}m\ell^2$ (4) και με αντικατάσταση I_o=9 kg·m^2. Άρα:

$$w_1 \cdot \ell \cdot ημθ + w \cdot ½\, \ell \cdot ημθ + w_2 \cdot ½\, \ell \cdot ημθ = I_o \cdot α_{γων} \text{ ή}$$

$$a_{γων} = \frac{6(M+3m)g \cdot ημθ}{(4M+15m)\ell} \quad (5)$$

α) Έτσι για τις επιταχύνσεις των υλικών σημείων έχουμε:

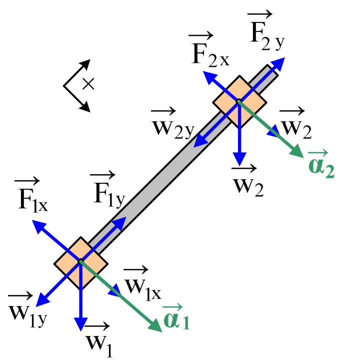
$$a_1 = a_{γων} \cdot \ell = \frac{6(M+3m)g \cdot ημθ}{(4M+15m)} \quad (6)$$

και με αντικατάσταση $α_1=\frac{20}{3}$ m/s^2.

$$α_2 = a_{γων} \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{3(M+3m)g \cdot ημθ}{(4M+15m)} \quad (7)$$

και με αντικατάσταση $α_2=\frac{10}{3}$ m/s^2.

β) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα $Σ_1$-$Σ_2$.



Από το 2^o νόμο του Νεύτωνα για κάθε υλικό σημείο παίρνουμε:

$$ΣF_{x1}=m_1 \cdot α_1 \text{ ή } m_1 g \cdot ημθ - F_{1x}= m_1 \cdot α_1 \text{ ή}$$

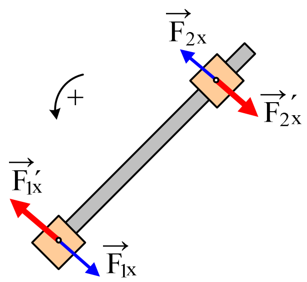
$$F_{1x} = m_1(gημθ - a_1) \quad (8)$$

και με αντικατάσταση F_{1x}=1·(10· ½ -20/3)N= $-\frac{5}{3}N$

το αποτέλεσμα μας λέει ότι η φορά της παραπάνω συνιστώσας είναι αντίθετη από αυτή που έχει σημειωθεί στο σχήμα. Το σώμα $Σ_1$ ασκεί όμως στη ράβδο την αντίδραση της F_1, οπότε η ασκούμενη ροπή είναι ίση:

$$τ_1= - F_{1x}' \cdot \ell = -\frac{10}{3}Nm$$

Να σημειωθεί ότι δεν μας ενδιαφέρει εδώ η συνιστώσα F_{1y} αφού δεν έχει ροπή ως προς το Ο.



Αντίστοιχα για το $Σ_2$ παίρνουμε:

$$ΣF_{x2}=m_2 \cdot α_2 \text{ ή } m_2 g \cdot ημθ - F_{2x}= m_2 \cdot α_2 \text{ ή}$$

$$F_{2x} = m_2(gημθ - a_2) \quad (8)$$

και με αντικατάσταση F_{2x}=1·(10· ½ -10/3)N= $\frac{5}{3}N$

με φορά όπως στο σχήμα

Το σώμα Σ_2 ασκεί όμως στη ράβδο την αντίδραση της F_2, οπότε η ασκούμενη ροπή είναι ίση:

$$\tau_2=F_{2x}^{\prime}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{5}{3}Nm$$

γ) Στην περίπτωση που η ράβδος θεωρηθεί αβαρής (M→0), οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν:

$$a_1=a_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell=\frac{6(M+3m)g\cdot\eta\mu\theta}{(4M+15m)}=\frac{6}{5}g\eta\mu\vartheta$$

και με αντικατάσταση α_1=6 m/s^2.

$$\alpha_2=\frac{3(M+3m)g\cdot\eta\mu\theta}{(4M+15m)}=\frac{3}{5}g\eta\mu\theta$$

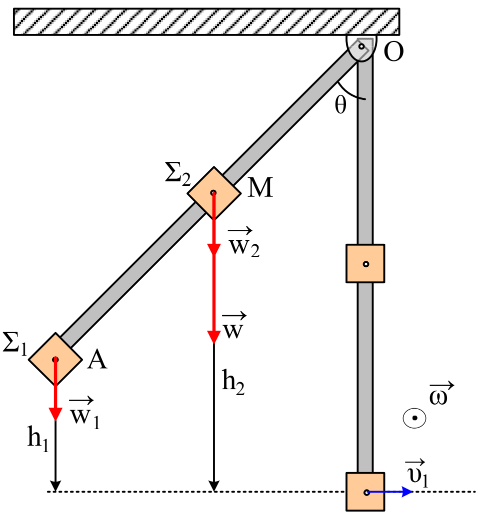
και με αντικατάσταση α_1=3 m/s^2.

Αλλά τότε:

$$F_{1x}=1\cdot(10\cdot ½ -6)N= - 1N \text{ και } \tau_1= - F_{1x}^{\prime}\cdot\ell = - 2N\cdot m \text{ και}$$

$$F_{2x}=1\cdot(10\cdot ½ -3)N= 2N \text{ και } \tau_2=F_{2x}^{\prime}\cdot\frac{\ell}{2} = + 2N\cdot m$$

iii) Εφαρμόζουμε για το στερεό την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, ανάμεσα στην αρχική θέση και τη θέση που η ράβδος γίνεται κατακόρυφη (θεωρούμε επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας αυτό που περνάει από την κατώτερη θέση του σώματος Σ_1).



$$K_{\alpha\rho\chi}+U_{\alpha\rho\chi}=K_{\tau\varepsilon\lambda}+U_{\tau\varepsilon\lambda} \text{ ή}$$

$$m_1gh_1 + m_2gh_2+ Mgh_2 = ½ I_o\cdot\omega^2 + (M+m_2)g\cdot\ell/2$$

όπου h_1= ℓ-ℓσυνθ και h_2=ℓ- ½ ℓ·συνθ, οπότε:

$$\omega=\sqrt{\frac{2g\ell\left(M+2m-\frac{M+3m}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta\right)}{I_o}}$$

και με αντικατάσταση ω≈3,27rad/s

Κατά συνέπεια η ταχύτητα του σώματος Σ_1 είναι:

$$\upsilon_1= \omega\cdot\ell \approx 6{,}54 \text{ m/s}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα για το Σ_1 το Θ.Μ.Κ.Ε. για την παραπάνω κίνηση και έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}= W_{w1}+W_{F1} \text{ ή}$$

$$W_{F1}= ½ m_1\cdot\upsilon_1^2 - m_1g\ell(1-\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Και με αντικατάσταση W_{F1}=18,7J

Σχόλιο

Με αφορμή ερώτημα που τέθηκε στη διάρκεια του σχολιασμού, ας δούμε τι συμβαίνει με την αβαρή ράβδο και το 2^o νόμο του Νεύτωνα, στην περίπτωση της αβαρούς ράβδου.

$$\Sigma\tau=I_\rho\cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αβαρής ράβδος σημαίνει ράβδος που η μάζα της τείνει στο μηδέν, αλλά τότε και $I \to 0$. Αλλά τότε οι ροπές των ασκουμένων δυνάμεων στη ράβδο, είναι στη πραγματικότητα $\tau_1 \to -2N \cdot m$ και $\tau_2 \to +2N \cdot m$, δηλαδή $\Sigma\tau \to 0$.

Δηλαδή η παραπάνω σχέση γράφεται

$$0 = 0 \cdot \alpha_{γων}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης