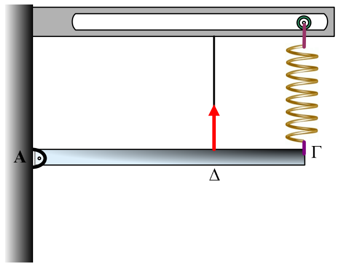
Μια …άλλη ταλάντωση στερεού.



Η ομογενής ράβδος ΑΓ μάζας Μ=30kg και μήκους 2m μπορεί να στρέφεται γύρω από άρθρωση στο άκρο της Α και ισορροπεί οριζόντια δεμένη στο σημείο Δ, όπου (ΑΔ)=1,25m, με κατακόρυφο νήμα και στο άκρο της Γ με κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς k=200N/m. Στη θέση αυτή η τάση του νήματος είναι ίση με 160Ν.

i) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα και η ράβδος αρχίζει να στρέφεται. Το πάνω άκρο του ελατηρίου συνδέεται με μια μικρή «ροδίτσα» σε εγκοπή, με αποτέλεσμα το ελατήριο να παραμένει συνεχώς κατακόρυφο.

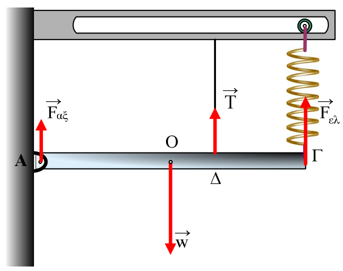
α) Να βρεθεί η μέγιστη γωνία που θα διαγράψει η ράβδος πριν σταματήσει στιγμιαία.

β) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της στη παραπάνω θέση;

iii) Να υπολογιστεί η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου κατά τη διάρκεια της κίνησής της.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = 1/3\ M\ell^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο. Η ράβδος ισορροπεί, οπότε:

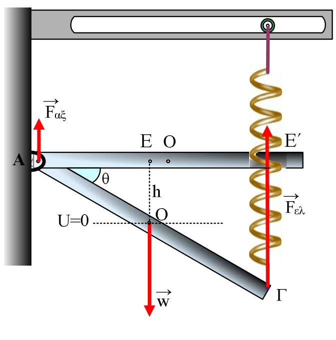
$$\Sigma F=0 \text{ ή } F_{αξ}+T+F_{ελ}-w=0 \text{ και}$$

$$\Sigma\tau_A=0 \text{ ή } T\cdot(ΑΔ) + F_{ελ}\cdot(ΑΓ)-w\cdot(ΑΟ)=0 \text{ ή}$$

$$160\cdot 1{,}25 + F_{ελ}\cdot 2 – 300\cdot 1 = 0 \text{ ή } F_{ελ}=50N$$

$$\text{Όμως } F_{ελ}=k\cdot\Delta\ell \rightarrow \Delta\ell=0{,}25m$$

Αλλά τότε $U= ½\ k\cdot\Delta\ell^2 = ½\ 200\cdot 0{,}25^2 J =6{,}25J$.



ii) Έστω ότι η ράβδος σταματά να στρέφεται στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία θ με την οριζόντια θέση.

α) Ανάμεσα στην αρχική και τελική θέση εφαρμόζουμε την ΑΔΜΕ, αφού οι δυνάμεις που παράγουν έργο, το βάρος και η δύναμη του ελατηρίου είναι δυνάμεις συντηρητικές.

$$K_{αρχ}+U_{β-αρ}+U_{ελ-αρ}= K_{αρχ}+U_{β-τ}+U_{ελ-τα} \text{ ή}$$

$$0 + Mgh + ½\ k\cdot\Delta\ell^2 = 0+ 0 + ½\ k\cdot(\Delta\ell+2h)^2$$

$$Mgh + ½\ k\cdot\Delta\ell^2 = ½\ k\cdot\Delta\ell^2 +2k\cdot\Delta\ell\cdot h + 2k\cdot h^2 \text{ ή}$$

$$300h = 2\cdot 200\cdot 0{,}25\cdot h + 2\cdot 200\cdot h^2 \text{ ή } 200h = 400h^2 \text{ ή}$$

$$h=0{,}5\ m$$

Αλλά $h=(ΟΕ)= ½\ \ell\cdot ημθ$, οπότε παίρνουμε ημθ = ½ ή θ=30°.

β) Ορίζοντας τη φορά περιστροφής των δεκτών του ρολογιού ως θετική έχουμε για τη θέση αυτή:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_A = Mg(AE) - F_{\varepsilon\lambda}\cdot 2(AE) \ (1)$$

Αφού τα τρίγωνα ΑΟΕ και ΑΓΕ΄ είναι όμοια, $F_{\varepsilon\lambda}$=k·(Δℓ+2h) = 200·1,25N=250N, ενώ:

$$(AE) = \tfrac{1}{2}\ \ell\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

Και η (1) δίνει:

$$\frac{dL}{dt} = Mg(AE) - F_{\varepsilon\lambda}\cdot 2(AE) = 300\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 250\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -100\sqrt{3}kgm^2/s^2.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μας λέει ότι η ράβδος δεν θα ηρεμήσει στη θέση αυτή, αλλά θα στραφεί ξανά, αλλά αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, προς την αρχική της θέση.

iii) Τη στιγμή που αφήσαμε τη ράβδο ελεύθερη, η συνολική ροπή είχε φορά ίδια με τους δείκτες του ρολογιού (την οποία θεωρήσαμε θετική), οπότε η ράβδος απέκτησε γωνιακή επιτάχυνση, η οποία όμως μειώνεται, σε κάποια θέση μηδενίζεται και μετά γίνεται αρνητική, αφού η ροπή της δύναμης του ελατηρίου έχει μεγαλύτερο μέτρο από τη ροπή του βάρους. Τη μέγιστη λοιπόν γωνιακή ταχύτητα θα έχει στην θέση όπου Στ=0. Έστω ότι σε αυτή τη θέση η γωνία που σχηματίζει η ράβδος με την οριζόντια διεύθυνση είναι φ. Δουλεύοντας πάνω στο ίδιο σχήμα, όπου θεωρούμε φ τη γωνία θα έχουμε:

$$Mg(AE) = F_{\varepsilon\lambda}\cdot 2(AE) \text{ ή}$$

$$Mg\cdot \tfrac{1}{2}\ \ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = k(\Delta\ell+\ell\cdot\eta\mu\varphi)\cdot\ell\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή}$$

$$\tfrac{1}{2}Mg = k\cdot\Delta\ell + k\cdot\ell\cdot\eta\mu\varphi \text{ ή}$$

$$\eta\mu\varphi = \tfrac{1}{4}$$

Σχόλιο:

Η ράβδος θα κάνει μια αμείωτη στροφική ταλάντωση (προσοχή **ΔΕΝ είναι ΑΑΤ!!!)** γύρω από τη θέση όπου ημφ= ¼ (περίπου φ=14,5°) μεταξύ της οριζόντιας θέσης και της άλλης ακραίας που θα σχηματίζει γωνία 30° με την αρχική.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης