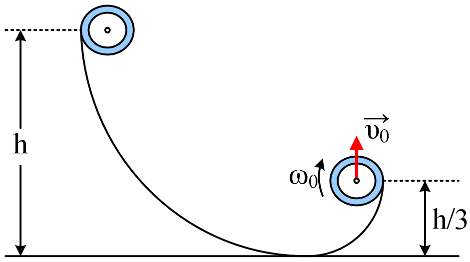
Κύλιση χωρίς ολίσθηση στο εσωτερικό οδηγού.



Ένας **κούφιος** κύλινδρος με λεπτά τοιχώματα, μάζας M=1Kg και ακτίνας R=0,1m, αφήνεται ελεύθερος στο σημείο Α από ύψος h=1,8m. **Ο κύλινδρος κυλά χωρίς να γλιστρά στο εσωτερικό του οδηγού** του σχήματος. Ο οδηγός έχει τέτοια κλίση ώστε στο άκρο Γ, γίνεται **κατακόρυφος**. Ο κύλινδρος φθάνει στο άκρο Γ, το οποίο απέχει απόσταση h/3 από το οριζόντιο επίπεδο, οπότε ξεφεύγει από τον οδηγό και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω. Να υπολογίσετε:

i) Το **μέγιστο ύψος** στο οποίο θα ανέβει ο κύλινδρος, καθώς και τον **αριθμό των περιστροφών** που θα εκτελέσει, από τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό μέχρι να φθάσει στο μέγιστο ύψος.

ii) Την **ταχύτητα** της μεταφορικής κίνησης τη στιγμή που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της τροχιάς του στο εσωτερικό του οδηγού καθώς και τη **στατική τριβή** που δέχεται από τον οδηγό εκείνη τη στιγμή.

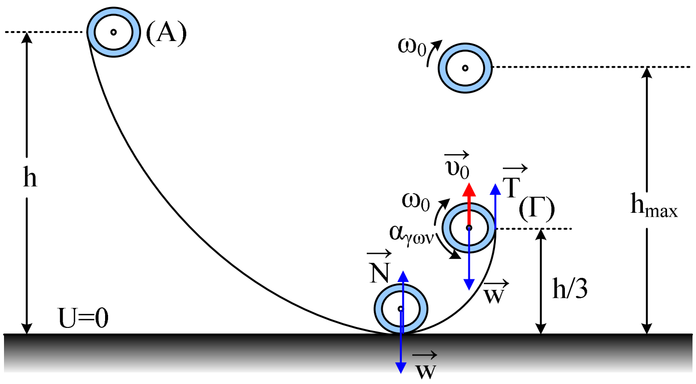
iii) Το μέτρο της **μεταφορικής** και **γωνιακής επιβράδυνσης** τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση Γ, καθώς και το **ρυθμό μεταβολής** της **κινητικής περιστροφικής**, της **κινητικής μεταφορικής** και της **δυναμικής βαρυτικής** του ενέργειας, την ίδια στιγμή. Να **επαληθεύσετε** την Αρχή Διατήρησης της Ενέργειας εκείνη τη στιγμή.

Δίνεται: $g=10m/s^2$

Απάντηση:

Εφόσον ο κύλινδρος είναι κούφιος με λεπτά τοιχώματα, **όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του**. Άρα η ροπή αδράνειας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots \Rightarrow I = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \ldots \Rightarrow I = (m_1 + m_2 + \ldots)R^2 \Rightarrow I = MR^2 \quad (1)$$



i) Η **στατική τριβή** που δέχεται ο κύλινδρος από τον οδηγό, **δεν προκαλεί απώλεια ενέργειας υπό μορφή θερμότητας**, άρα **διατηρείται η μηχανική** του ενέργεια. Τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση Γ, έχει γωνιακή ταχύτητα:

$$E_{ολ(Α)} = E_{ολ(Γ)} \Rightarrow Mgh = Mg\frac{h}{3} + \frac{1}{2}M\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 \Rightarrow Mg\frac{2h}{3} = \frac{1}{2}M\omega_0^2R^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega_0^2 \Rightarrow$$

$$Mg\frac{2h}{3} = M\omega_0{}^2R^2 \Rightarrow \omega_0{}^2 = \frac{2gh}{3R^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{3}} \Rightarrow \omega_0 = 20\sqrt{3}\frac{rad}{s} \qquad (2)$$

Μόλις ο κύλινδρος **εγκαταλείψει** τον οδηγό, η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος του, το οποίο όμως **δεν προκαλεί ροπή** ως προς τον άξονα περιστροφής. Άρα δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση και έτσι η **γωνιακή του ταχύτητα διατηρείται σταθερή**. Το βάρος όμως **επιβραδύνει τη μεταφορική κίνηση**, προκαλώντας επιβράδυνση σταθερού μέτρου: α=g. Συνεπώς η σύνθετη κίνηση που εκτελεί μόλις εγκαταλείψει τον οδηγό περιλαμβάνει μια **ομαλή περιστροφική** και μια **ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική.** Στο μέγιστο ύψος φθάνει τη στιγμή που μηδενίζεται η μεταφορική του ταχύτητα:

$$E_{o\lambda(\mathrm{A})} = E_{o\lambda(H)} \Rightarrow Mgh = Mgh_{\max} + \frac{1}{2}I\omega_0{}^2 \Rightarrow Mgh = Mgh_{\max} + \frac{1}{2}MR^2\frac{2gh}{3R^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}Mgh = Mgh_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{2h}{3} \Rightarrow h_{\max} = 1,2m \quad (3)$$

Τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό στη θέση Γ έχει ταχύτητα: $\upsilon_0 = \omega_0 R \Rightarrow \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2gh}{3}}$

Εφόσον εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη μεταφορική ισχύει:

$$\upsilon = \upsilon_0 - gt \Rightarrow 0 = \upsilon_0 - gt \Rightarrow t = \frac{\upsilon_0}{g} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{3g}}$$

Ο αριθμός των περιστροφών που θα εκτελέσει, από τη στιγμή που εγκαταλείπει τον οδηγό μέχρι να φθάσει στο μέγιστο ύψος, υπολογίζεται από:

$$\theta = \omega_0 t \Rightarrow N2\pi = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2gh}{3}}\sqrt{\frac{2h}{3g}} \Rightarrow N = \frac{h}{3R\pi} \Rightarrow N = \frac{6}{\pi}\,\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho o\varphi\acute{\varepsilon}\varsigma$$

ii) Τη στιγμή που διέρχεται από το κατώτερο σημείο της τροχιάς του στο εσωτερικό του οδηγού, έχει μεταφορική ταχύτητα:

$$E_{o\lambda(\mathrm{A})} = E_{o\lambda(\mathrm{Z})} \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}M\upsilon^2 \Rightarrow Mgh = M\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{gh} \Rightarrow \upsilon = 3\sqrt{2}\frac{m}{s}$$

Από τη θέση Α μέχρι τη θέση Ζ ο κύλινδρος επιταχύνεται. Στη θέση Ζ η αρχική δυναμική βαρύτητας έχει μετατραπεί **πλήρως** σε κινητική, οπότε έχει αποκτήσει **μέγιστη ταχύτητα**. Την ίδια στιγμή η **επιτάχυνσή** του **μηδενίζεται**:

$$\upsilon = \upsilon_{\max} \Rightarrow a = \frac{d\upsilon}{dt} = 0$$

Στην ίδια θέση **μηδενίζεται στιγμιαία η στατική τριβή**, αφού μηδενίζονται η μεταφορική και η γωνιακή επιτάχυνση.

iii) Από τη θέση Ζ μέχρι τη θέση Γ αυξάνεται η δυναμική και μειώνεται η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, άρα ο κύλινδρος **επιβραδύνεται**. Στη θέση Γ η στατική τριβή είναι **κατακόρυφη** με φορά προς τα **πάνω**, ώστε να δημιουργεί αριστερόστροφη ροπή και να επιβραδύνει τη δεξιόστροφη περιστροφή. Στη **θέση Γ** ισχύει:

$$\Sigma F = Mg - T = Ma_{cm}$$

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T = MRa_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T = Ma_{cm}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$Mg = 2Ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{g}{2} \Rightarrow a_{cm} = 5\frac{m}{s^2}$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{g}{2R} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 50\frac{rad}{s^2}$$

$$T = Ma_{cm} \Rightarrow T = 5N$$

Ο **ρυθμός μεταβολής** της κινητικής **μεταφορικής** ενέργειας είναι ίσος με:

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = -\Sigma F \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} = -5 \cdot 2\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Ο **ρυθμός μεταβολής** της κινητικής **περιστροφικής** ενέργειας είναι ίσος με:

$$\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = -\Sigma \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = -TR \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = -0,5 \cdot 20\sqrt{3} = -10\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Ο **ρυθμός μεταβολής** της **δυναμικής** βαρυτικής ενέργειας είναι ίσος με:

$$\frac{dU}{dt} = -P_W = -Mg \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu 180^0 \Rightarrow \frac{dU}{dt} = Mg \cdot \upsilon \Rightarrow \frac{dU}{dt} = 10 \cdot 2\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\frac{J}{s}$$

Ισχύει ότι:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_{o\lambda}}{dt} = 0 \Rightarrow E_{o\lambda} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\eta}$$

δηλαδή ο ρυθμός ελάττωσης της κινητικής είναι ίσος με το ρυθμό αύξησης της δυναμικής.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Θοδωρής Παπασγουρίδης