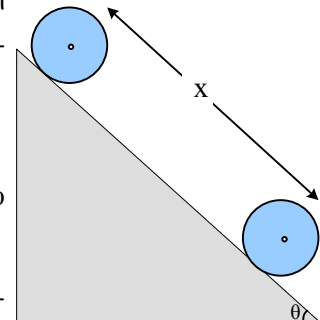


### Κίνηση κυλίνδρου σε κεκλιμένο επίπεδο.

Ένας κύλινδρος μάζας 10kg και ακτίνας 0,2m αφήνεται για  $t=0$  να κινηθεί σε μη λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως  $\theta$ , όπου  $\eta\mu\theta=0,8$ . Ο άξονας του κυλίνδρου μετατοπίζεται κατά  $x=27\text{m}$ , μέχρι τη στιγμή  $t_1=3\text{s}$ .



- i) Να υπολογίσετε την τριβή που ασκείται στον κύλινδρο.
  - ii) Πόση είναι η ταχύτητα τη στιγμή  $t_1$  ενός σημείου A επαφής του κυλίνδρου με το επίπεδο;
  - iii) Να υπολογίσετε το έργο της τριβής για την παραπάνω μετατόπιση του κυλίνδρου;
  - iv) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου και με ποιο ρυθμό παράγεται θερμότητα εξαιτίας της τριβής, τη χρονική στιγμή  $t_1$ ;
- Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του  $I = \frac{1}{2} MR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

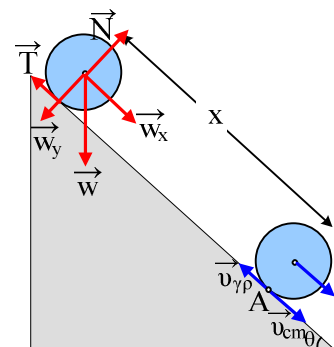
#### Απάντηση:

- i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, ο οποίος θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση, την οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική. Εφαρμόζουμε το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για τις κινήσεις αυτές (θεωρούμε θετική φορά περιστροφής τη φορά των δεικτών του ρολογιού):

$$\text{Μεταφορική: } \Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow Mg\eta\mu\theta - T = M \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\text{Στροφική: } \Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T = \frac{1}{2} MR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$



Η ασκούμενη τριβή, δεν υπάρχει λόγος να μεταβληθεί στη διάρκεια της κίνησης, συνεπώς από την εξίσωση (1) συμπεραίνουμε ότι η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία ισχύουν:

$$x = \frac{1}{2} a_{cm} \cdot t^2 \quad (3) \quad \text{και} \quad v_{cm} = a_{cm} \cdot t \quad (4) \quad \text{τότε:}$$

$$a_{cm} = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 27}{3^2} \text{ m/s}^2 = 6 \text{ m/s}^2$$

Και από την (1) παίρνουμε:  $T = Mg\eta\mu\theta - M \cdot a_{cm} = 10 \cdot 10 \cdot 0,8 \text{ N} - 10 \cdot 6 \text{ N} = 20 \text{ N}$ .

- ii) Στο παραπάνω σχήμα (τελική θέση) έχουν σχεδιαστεί οι συνιστώσες ταχύτητες του σημείου A,  $v_{cm}$  εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και  $v_{\gamma\pi} = \omega \cdot R$  εξαιτίας της κυκλικής κίνησης του σημείου, που οφείλεται στην περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου.

Αλλά από την (4) έχουμε:  $v_{cm} = a_{cm} \cdot t = 6 \cdot 3 \text{ m/s} = 18 \text{ m/s}$

Ενώ από την (2)  $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2T}{MR} = \frac{2 \cdot 20}{10 \cdot 0,2} \text{ rad/s}^2 = 20 \text{ rad/s}^2$ , οπότε

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 20 \cdot 3 \text{ rad/s} = 60 \text{ rad/s}$$

$$\text{συνεπώς } v_{\gamma\pi} = \omega \cdot R = 60 \cdot 0,2 \text{ m/s} = 12 \text{ m/s}$$

$$\text{Αλλά } \vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\gamma\rho} \rightarrow v_A = v_{cm} - v_{\gamma\rho} = 18\text{m/s} - 12\text{m/s} = 6\text{m/s}.$$

iii) Η γωνία κατά την οποία στράφηκε ο κύλινδρος είναι  $\theta = \frac{1}{2} \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3^2 \text{rad} = 90\text{rad}$ , συνεπώς το μήκος της περιφέρειας του κυλίνδρου που ήρθε σε επαφή με το έδαφος είναι:

$$s_1 = \theta \cdot R = 90 \cdot 0,2\text{m} = 18\text{m}$$

Άρα ο κύλινδρος γλίστρησε κατά  $s = x - s_1 = 27\text{m} - 18\text{m} = 9\text{m}$ , και το έργο της τριβής είναι:

$$W_T = T \cdot s \cdot \sin 180^\circ = -T \cdot s = -20 \cdot 9\text{J} = -180\text{J}.$$

Το παραπάνω έργο εκφράζει την (μηχανική) ενέργεια που αφαιρέθηκε από τον κύλινδρο και μετετράπη σε θερμική ή όπως έχει επικρατήσει να λέγεται σε θερμότητα.

iv) Η μεταβολή της περιστροφικής κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου, συνδέεται με το έργο της ροπής της τριβής:

$$\frac{dK_{\pi}}{dt} = P_{\tau} = \tau \cdot \omega = TR \cdot \omega = 20 \cdot 0,2 \cdot 60\text{J/s} = 240\text{J/s}$$

Ενώ η παραγόμενη θερμότητα συνδέεται με το συνολικό έργο της τριβής (ολίσθησης):

$$\frac{dQ}{dt} = \left| \frac{dW_T}{dt} \right| = |P_T| = |T \cdot v_A| = 20 \cdot 6\text{J/s} = 120\text{J/s}$$

### Σχόλιο:

Θεωρώντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την τελική θέση του κυλίνδρου, τότε στην αρχική θέση ο κύλινδρος έχει δυναμική ενέργεια:

$$U = Mgh = Mg \cdot x \cdot \eta \mu \theta = 2.160\text{J}$$

τόσο θα είναι δε, και το έργο που παράγεται από το βάρος κατά την μετακίνησή του.

Στην τελική θέση ο κύλινδρος έχει κινητική ενέργεια  $K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega^2$  ή

$$K = \frac{1}{2} 10 \cdot 18^2\text{J} + \frac{1}{4} 10 \cdot 0,2^2 \cdot 60^2\text{J} = 1.980\text{J}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι έχουμε απώλεια μηχανικής ενέργειας ίση με  $2.160\text{J} - 1.980\text{J} = 180\text{J}$ , η οποία οφείλεται στην τριβή ολίσθησης, η οποία μέσω του έργου της, την υποβάθμισε, μετατρέποντάς την σε θερμική (αύξηση της κινητικής ενέργειας των μορίων του κυλίνδρου και του επιπέδου, που οφείλεται στην άτακτη θερμική τους κίνηση. Σαν συνέπεια θα αυξηθεί η θερμοκρασία των δύο σωμάτων και στη συνέχεια μπορεί να έχουμε μεταφορά ενέργειας από τα σώματα αυτά προς το περιβάλλον με τη μορφή της θερμότητας). Όλες αυτές τις μετατροπές, συνήθως δεν τις αναφέρουμε, αλλά με βάση το σχολικό μας βιβλίο, λέμε ότι παράγεται θερμότητα  $180\text{J}$  εξαιτίας της τριβής.

### Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

*Διονύσης Μάργαρης*