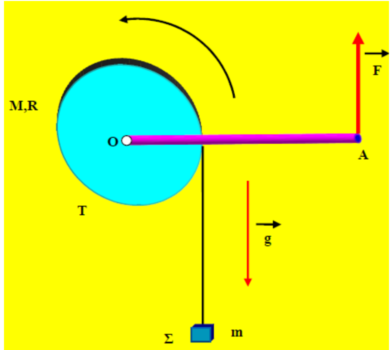
# Τροχαλία με μοχλό




Η τροχαλία Τ του σχήματος, έχει μάζα M = 16 kg ακτίνα R = 1m , και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο της Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό της.

Ένα αβαρές μη εκτατό νήμα μεγάλου μήκους, τυλίγεται στ' αυλάκι της τροχαλίας και δεν γλιστρά πάνω της. Στο κάτω άκρο του νήματος είναι δεμένο σώμα Σ μάζας m = 2kg αμελητέων διαστάσεων.

Μια αβαρής ράβδος-μοχλός ΟΑ μήκους ℓ = 3R, είναι κολλημένη στο επίπεδο της τροχαλίας όπως φαίνεται στο σχήμα.

Στο άκρο Α του μοχλού ασκείται δύναμη σταθερού μέτρου F = 10 N που παραμένει κάθετη σ' αυτόν.

Το σώμα Σ ξεκινά να ανεβαίνει κατακόρυφα τη χρονική στιγμή t = 0 χωρίς αρχική ταχύτητα, και το νήμα είναι πάντα τεντωμένο.

Τη χρονική στιγμή $t_1$, το σώμα έχει ανέβει ύψος σε h = 8 m πάνω από την αρχική του θέση.

I. Να υπολογίσετε:

i) Την επιτάχυνση του σώματος Σ.

ii) Το έργο της δύναμης μέτρου F από t = 0 μέχρι t = $t_1$.

II. Να υπολογίσετε τις τιμές που έχουν τα παρακάτω μεγέθη τη χρονική στιγμή $t_1$:

iii) Η κινητική ενέργεια του σώματος Σ.

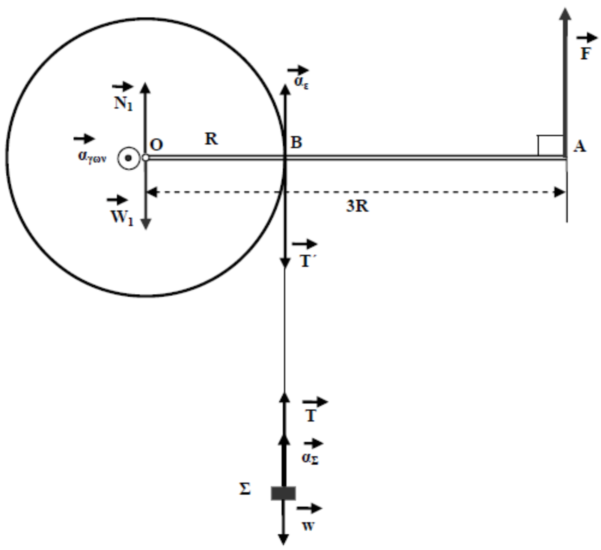
iv) Η στροφορμή του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας.

v) Ο ρυθμός που προσφέρεται ενέργεια στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης F και τους ρυθμούς που η ενέργεια αυτή μετατρέπεται σε άλλες μορφές την ίδια χρονική στιγμή.

vi) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του συστήματος.

Δίνεται g = 10m/s², και ότι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής , υπολογίζεται με τη σχέση $I_{cm} = ½MR^2$.

**Απάντηση**




i) Για την μεταφορική κίνηση του σώματος Σ ισχύει

$$\vec{T} + \vec{w} = m\vec{\alpha}_\Sigma \text{ ή } T - w = m\alpha_\Sigma \quad (1)$$

Για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας ισχύει

$$\Sigma\tau_O = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } \tau_{w1} + \tau_{N1} + \tau_{T'} + \tau_F = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{ή } 0+0 - T'R + F3R = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά Τ = Τ΄ (νήμα αβαρές ) και $\alpha_\varepsilon = \alpha_\Sigma = \alpha_{\gamma\omega\nu}R$ ο-πότε η (2) γράφεται

$$F3R - T\cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{\alpha_\Sigma}{R} \text{ ή}$$

$$3F - T = \frac{1}{2}M\alpha_\Sigma \quad (3)$$

Από τις (1) και (3) έχουμε $3F - mg = \left(m + \frac{M}{2}\right)\alpha_\Sigma$ ή $\alpha_\Sigma = \dfrac{3F - mg}{m + \frac{M}{2}}$ ή

$$\alpha_\Sigma = 1 m/s^2 \ (4).$$

ii) Αφού το νήμα δεν γλιστρά πάνω στην τροχαλία το ύψος h κατά το οποίο ανέρχεται το σώμα , είναι ίσο με το μήκος Δs του τόξου που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας.

Αν λοιπόν Δθ η γωνία κατά την οποία στρέφεται η τροχαλία μαζί με τη ράβδο θα είναι:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{h}{R} = 8 \text{ rad}$$

Αλλά $W_F = \tau_{F,O} \cdot \theta = F3R\theta$ ή $W_F = 240j$.

iii) Η κινητική ενέργεια το σώματος Σ είναι $K_\Sigma = \frac{1}{2} m\upsilon_\Sigma^2$ (5)

Όμως $\upsilon_\Sigma = \alpha_\Sigma t$ (6) και $h = \frac{1}{2}\alpha_\Sigma t^2$ (7)

Από τις (4), (5), (6), (7) προκύπτει $K_\Sigma = 16j$ (8)

iv) Η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι $\vec{L} = \vec{L}_\Sigma + \vec{L}_T$ και επειδή $\vec{L}_\Sigma \uparrow\uparrow \vec{L}_T$ έχουμε

$$L = m\upsilon_\Sigma R + I_{cm}\omega \text{ ή}$$

$$\left.\begin{array}{l} L = m\upsilon_\Sigma R + \frac{1}{2}MR^2\omega \\ \upsilon_\Sigma = \upsilon_\varepsilon = \omega R \end{array}\right\} \rightarrow L = m\upsilon_\Sigma R + \frac{1}{2}MR^2\frac{\upsilon_\Sigma}{R} \text{ ή } L = m\upsilon_\Sigma R + \frac{1}{2}MR\upsilon_\Sigma \ (9)$$

Από τις (5), (8) προκύπτει $\upsilon_\Sigma = \sqrt{\dfrac{2K_\Sigma}{m}} = 4$ m/s (10) και από τις (9), (10) προκύπτει τελικά

$$L = 40\, kgm^2/s \text{ και } \vec{L} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu}.$$

v) Ο ρυθμός με τον οποίο προσφέρεται ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ είναι

$$\frac{dW_F}{dt} = \tau_{F,O} \cdot \omega = F3R\omega = 3F\upsilon_\Sigma = 120 \text{ j/s}.$$

Η ενέργεια που προσφέρεται στο σύστημα μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ μετατρέπεται :

(α). Σε κινητική ενέργεια του σώματος Σ , $K_\Sigma = \frac{1}{2}m\upsilon_\Sigma^2$

(β). Σε δυναμική ενέργεια του σώματος Σ , $U = mgh$

(γ). Σε κινητική ενέργεια της τροχαλίας , $K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$

Άρα :

$$\frac{dK_\Sigma}{dt} = 2\cdot\frac{1}{2}m\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt}\upsilon_\Sigma = m\alpha_\Sigma\upsilon_\Sigma = 8 \text{ j/s}$$

$$\frac{dU}{dt} = mg\frac{dh}{dt} = +mg\upsilon_\Sigma = 80 \text{ j/s} .$$

$$\frac{dK}{dt} = 2\cdot\frac{1}{2}I_{cm}\frac{d\omega}{dt}\omega = I_{cm}\alpha_{\gamma\omega\nu}\omega = 32 \text{ j/s}$$

vi) Με βάση τη σχέση (9) έχουμε

$$\frac{dL}{dt} = mR\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt} + \frac{1}{2}MR\frac{d\upsilon_\Sigma}{dt} \text{ ή } \frac{dL}{dt} = mR\alpha_\Sigma + \frac{1}{2}MR\alpha_\Sigma \text{ ή}$$

$$\frac{dL}{dt} = 10\,kgm^2/s^2$$

**Υλικό Φυσικής - Χημείας.**
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

***Μανώλης Δρακάκης***