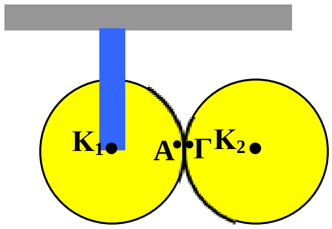
Σύστημα σταθερής και ελεύθερης τροχαλίας.



Οι δύο όμοιες ομογενείς τροχαλίες του σχήματος έχουν ακτίνα R=0,08m, μάζα M=8Kg και είναι συνδεδεμένες με νήμα αμελητέας μάζας που είναι τυλιγμένο στις περιφέρειες τους. Η μία τροχαλία έχει σταθερό το κέντρο μάζας της K_1 . Η άλλη είναι αρχικά ακίνητη και το κέντρο μάζας της K_2 είναι στο ίδιο ύψος με αυτό της σταθερής τροχαλίας.

Οι δύο τροχαλίες μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους K_1 και K_2 και είναι κάθετοι σε αυτές. Αφήνουμε κάποια στιγμή ελεύθερη την τροχαλία κέντρου μάζας K_2.Κατά την διάρκεια της πτώσης της το νήμα ξετυλίγεται και από τις δύο τροχαλίες χωρίς να ολισθαίνει σ' αυτές παραμένοντας διαρκώς κατακόρυφο και αυτές στρέφονται με την ίδια φορά.

α. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας K_2 με τα μέτρα των επιτρόχιων ταχυτήτων των σημείων Α και Γ των δύο τροχαλιών.

β. Να βρεθεί η σχέση που συνδέει το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας K_2 με τα μέτρα των επιτρόχιων επιταχύνσεων των σημείων Α και Γ των δύο τροχαλιών.

Να υπολογιστούν:

γ. τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων $\alpha_{\gamma\omega\nu_1}$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu_2}$ των δύο τροχαλιών.

δ. το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας K_2 , α_{cm} .

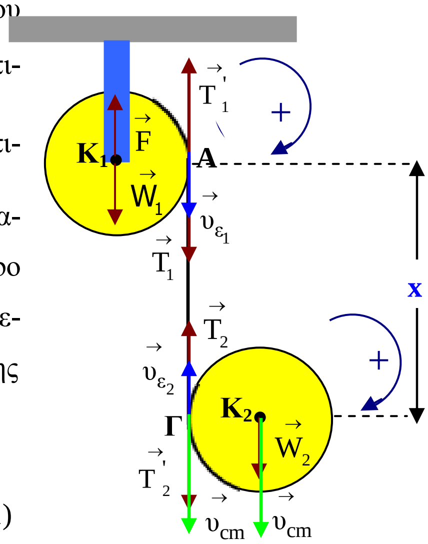
ε. η δύναμη που ασκεί το νήμα(τάση) στις τροχαλίες.

Δίνονται οι ροπές αδρανείας των δύο τροχαλιών ως προς τους άξονες περιστροφής τους :

$$I_{(K_1)} = I_{(K_2)} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ και } g=10\frac{m}{s^2}.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α.1^{ος} Τρόπος



Αν υ_{cm}=το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της τροχαλίας κέντρου μάζας K_2 λόγω της μεταφορικής κίνησης, υ_{ε_1} = το μέτρο της γραμμικής (επιτρόχιας) ταχύτητας του σημείου Α και υ_{ε_2} = το μέτρο της γραμμικής (επιτρόχιας) ταχύτητας του σημείου Γ λόγω των στροφικών κινήσεων των τροχαλιών όταν από τις δύο τροχαλίες έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους x ,το κέντρο μάζας K_2 της ελεύθερης τροχαλίας έχει αντίστοιχα μετακινηθεί λόγω της μεταφορικής κίνησής της κατά x και οι δύο τροχαλίες έχουν διαγράψει λόγω της περιστροφικής τους κίνησης τόξα $\widehat{s}_1$ και $\widehat{s}_2$.Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στις τροχαλίες ισχύει: $x=\widehat{s}_1+\widehat{s}_2 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{d\widehat{s}_1}{dt}+\frac{d\widehat{s}_2}{dt} \Rightarrow \upsilon_{cm}=\upsilon_{\varepsilon_1}+\upsilon_{\varepsilon_2}$ (1)

2ος Τρόπος

Όλα τα σημεία του νήματος άρα και τα **Α** και **Γ** έχουν την ίδια ταχύτητα. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στις τροχαλίες τα σημεία **Α** και **Γ** έχουν τις ίδιες ταχύτητες με τα σημεία επαφής τους στις τροχαλίες: $\upsilon_A=\upsilon_\Gamma \Rightarrow \upsilon_{\varepsilon_1} = \upsilon_{cm} - \upsilon_{\varepsilon_2} \Rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_{\varepsilon_1} + \upsilon_{\varepsilon_2}$ (1)

β. 1ος Τρόπος

Παραγωγίζουμε τη σχέση (1) ως προς το χρόνο: $\frac{d\upsilon_{cm}}{dt} = \frac{d\upsilon_{\varepsilon_1}}{dt} + \frac{d\upsilon_{\varepsilon_2}}{dt} \Rightarrow a_{cm}= a_{\varepsilon_1} + a_{\varepsilon_2}$ (2)

όπου: a_{cm} =η επιτάχυνση του κέντρου μάζας K_2 , a_{ε_1} =η επιτρόχιος επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της σταθερής τροχαλίας ,άρα και του σημείου **Α**, a_{ε_2} = η επιτρόχιος επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας της ελεύθερης τροχαλίας , άρα και του σημείου **Γ**.

2ος Τρόπος

Όλα τα σημεία του νήματος άρα και τα **Α** και **Γ** έχουν την ίδια επιτάχυνση. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στις τροχαλίες τα σημεία **Α** και **Γ** έχουν τις ίδιες επιταχύνσεις με τα σημεία επαφής τους στις τροχαλίες: $a_A=a_\Gamma \Rightarrow a_{\varepsilon_1} = a_{cm} - a_{\varepsilon_2} \Rightarrow a_{cm} = a_{\varepsilon_1} + a_{\varepsilon_2}$ (2)

γ. Στο νήμα ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2'$ από τις τροχαλίες. Οι αντιδράσεις τους $\vec{T}_1$ και $\vec{T}_2$ ασκούνται από το νήμα στις τροχαλίες κέντρων K_1 και K_2 αντίστοιχα. Δηλαδή $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$ (1) και $\vec{T}_2' =-\vec{T}_2$ (2).Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (Θ.Ν.Μ) για το αμελητέας μάζας νήμα:

$$\Sigma\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{T}_1' = \vec{T}_2' \Rightarrow T_1' = T_2' \xrightarrow{(7)} T_1 = T_2 = T \ (3)$$

Θεωρούμε ως θετικού μέτρου τις ροπές που έχουν τη φορά περιστροφής των τροχαλιών.

Από τον Θ.Ν.Μ για την στροφική κίνηση της σταθερής τροχαλίας:

$$\Sigma\tau_{(K_1)} = I_{(K_1)}\alpha_{\gamma\omega\nu_1} \Rightarrow T_1R=\frac{1}{2}MR^2\,\alpha_{\gamma\omega\nu_1} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu_1} = \frac{2T_1}{MR} \ (4)$$

Από τον Θ.Ν.Μ για την στροφική κίνηση της ελεύθερης τροχαλίας:

$$\Sigma\tau_{(K_2)} = I_{(K_2)}\alpha_{\gamma\omega\nu_2} \Rightarrow T_2R=\frac{1}{2}MR^2\,\alpha_{\gamma\omega\nu_2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu_2} = \frac{2T_2}{MR} \ (5)$$

$$\text{Από (3),(4),(5): } \alpha_{\gamma\omega\nu_1} = \alpha_{\gamma\omega\nu_2} = \frac{2T}{MR} \ (6)$$

Για τις στροφικές κινήσεις των τροχαλιών ισχύει: $a_{\varepsilon_1} = \alpha_{\gamma\omega\nu_1}R$ και $a_{\varepsilon_2} = \alpha_{\gamma\omega\nu_2}R$ και λόγω της (6):

$$a_{\varepsilon_1} = a_{\varepsilon_2} = \frac{2T}{M} \ (7).$$

$$\text{Από (2)} \xrightarrow{(7)} a_{cm} = 2a_{\varepsilon_1} = 2a_{\varepsilon_2} \ (8)$$

Από τον Θ.Ν.Μ για τη μεταφορική κίνηση της ελεύθερης τροχαλίας: $\Sigma\vec{F}=M\vec{a}_{cm} \overset{\downarrow +}{\Rightarrow} W_2-T_2=Ma_{cm} \overset{(3),(7)}{\Longrightarrow}$

$$Mg-\frac{Ma_{\varepsilon_2}}{2}=Ma_{cm} \overset{(8)}{\Longrightarrow} a_{\varepsilon_2}=\frac{2g}{5} \Rightarrow a_{\varepsilon_2}=4\frac{m}{s^2} \ (9)$$

$$\text{Άρα } \alpha_{\gamma\omega\nu_1}=\alpha_{\gamma\omega\nu_2}=\frac{a_{\varepsilon_2}}{R} \overset{(9)}{\Longrightarrow} \alpha_{\gamma\omega\nu_1}=\alpha_{\gamma\omega\nu_2}=50\frac{rad}{s^2} \ (10).$$

δ. Από (8)και(9): $a_{cm}=8\frac{m}{s^2}$.

ε. Από (6): $T=\frac{MR\alpha_{\gamma\omega\nu_2}}{2} \overset{(10)}{\Longrightarrow} T=16N$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το ίδιο πρόβλημα μπορεί να δοθεί με δύο τροχαλίες διαφορετικών ακτίνων ($R_1 \neq R_2$).Οι σχέσεις $x=\widehat{s}_1+\widehat{s}_2$, $\upsilon_{cm}=\upsilon_{\varepsilon_1}+\upsilon_{\varepsilon_2}$, $a_{cm}=a_{\varepsilon_1}+a_{\varepsilon_2}$ ισχύουν διότι οι συνθήκες κίνησης των δύο τροχαλιών δεν αλλάζουν. Επειδή όμως $a_{\varepsilon_1}=\alpha_{\gamma\omega\nu_1}R_1$ και $a_{\varepsilon_2}=\alpha_{\gamma\omega\nu_2}R_2$, η σχέση $a_{cm}=a_{\varepsilon_1}+a_{\varepsilon_2}$ γράφεται:

$$a_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu_1}R_1+\alpha_{\gamma\omega\nu_2}R_2.$$

2. Η επιτρόχιος επιτάχυνση των σημείων των περιφερειών των τροχαλιών λόγω της στροφικής κίνησης στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ως «ρυθμός αύξησης της ταχύτητας ενός σημείου της περιφέρειας της

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ.Στεργιάδης