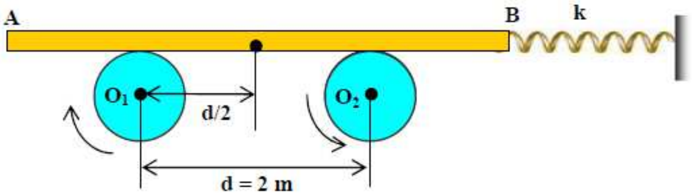
Σύστημα σανίδας - ελατηρίου πάνω σε τροχούς.

Μια ομογενής σανίδα ΑΒ μάζας $m = 10$ kg , είναι τοποθετημένη πάνω σε δυο όμοιους κυλίνδρους , τα κέντρα O_1 , O_2 των οποίων απέχουν μεταξύ τους κατά $d = 2$ m. Ο καθένας από τους παραπάνω κυλίνδρους μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που συμπίπτει με τον γεωμετρικό του άξονα. Οι άξονες περιστροφής των κυλίνδρων είναι παράλληλοι μεταξύ τους και βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Η διεύθυνση της σανίδας, συμπίπτει με τον άξονα οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 960$N/m , που έχει το ένα άκρο του ακλόνητο , και το άλλο δεμένο στο άκρο Β της σανίδας , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης της σανίδας στα σημεία επαφής με τους κυλίνδρους είναι $\mu = 0,4$.

Αρχικά, το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και η σανίδα ηρεμεί με το μέσον της, ακριβώς πάνω από το μέσον της απόστασης μεταξύ των αξόνων των κυλίνδρων οι οποίοι έχουν τεθεί σε αντίρροπες περιστροφές. Μετακινούμε τη σανίδα προς τα αριστερά κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου κατά $x_0 = 0,4$ m χωρίς να χάσει την επαφή της με τους κυλίνδρους, και την αφήνουμε ελεύθερη.

i) Να αποδείξετε ότι η σανίδα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογίσετε την περίοδο της ταλάντωσης αυτής.

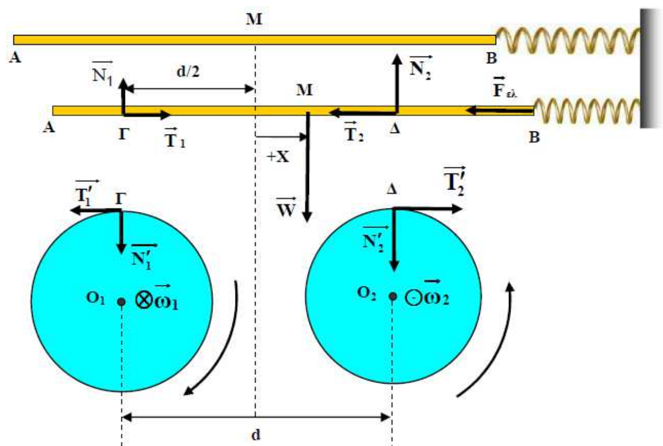
ii) Με θετική τη φορά της αρχικής απομάκρυνσης της σανίδας από τη θέση ισορροπίας της να βρείτε την εξίσωση απομάκρυνσης χρόνου για την παραπάνω ταλάντωση.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της δύναμης του ελατηρίου σε συνάρτηση με το χρόνο.

iv) Να βρείτε τις εξισώσεις των δυνάμεων τριβής που δέχεται η σανίδα από τους τροχούς στα σημεία επαφής, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται $g = 10$ m/s² .

Απάντηση



i) Έστω μια τυχαία μετατόπιση της σανίδας από τη θέση ισορροπίας κατά x όπως φαίνεται στο σχήμα.

Στη θέση αυτή έχουμε

$$\Sigma F_x = T_1 - T_2 - F_{\varepsilon\lambda} \text{ ή } \Sigma F_x = T_1 - T_2 - kx \quad (1)$$

όπου T_1 , T_2 είναι τα μέτρα των τριβών ολίσθησης στα σημεία επαφής με τους τροχούς δηλαδή

$$T_1 = \mu N_1 \text{ και } T_2 = \mu N_2 \quad (2)$$

Η σανίδα δεν περιστρέφεται άρα

$$\Sigma\tau_{(\Gamma)} = 0 \text{ ή τελικά } N_2 d = w\left(\frac{d}{2} + x\right) \text{ ή } N_2 = \frac{w}{2} + \frac{wx}{d} \text{ ή}$$

$$N_2 = 50 + 50x \text{ (SI)} \quad (3)$$

Εξ’ άλλου από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα έχουμε ότι

$N_1 + N_2 = w$ ή $N_1 = w - N_2$ και με βάση την (3) $N_1 = 50 - 50x$ (SI) (4)

Από τις (2) με βάση τις (3), (4) έχουμε ότι

$$T_1 = 20 - 20x \text{ (SI) (5) και } T_2 = 20 + 20x \text{ (SI) (6)}$$

Από την (1) με βάση τις (5), (6) προκύπτει

$$\Sigma F_x = 20 - 20x - 20 - 20x - 960x \text{ ή}$$

$$\Sigma F_x = -1000x \text{ (SI) άρα } \Sigma F_x = -Dx$$

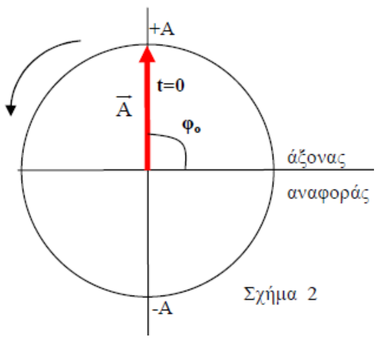
κατά συνέπεια η σανίδα θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με D = 1000N/m .

Η περίοδος της ταλάντωσης αυτής είναι $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ ή $T = \frac{\pi}{5}$ s. (7)

ii) Η στιγμιαία απομάκρυνση δίνεται από τη σχέση $x = A\eta\mu(\omega t+\varphi_o)$ (8)

Την χρονική στιγμή t = 0 η σανίδα αφήνεται ελεύθερη δηλαδή έχει μηδενική ταχύτητα άρα x_o = +A και όπως προκύπτει από τον κύκλο αναφοράς που φαίνεται στο σχήμα 2, η αρχική φάση είναι $\varphi_o = \pi/2$. Εξ άλλου η κυκλική συχνότητα είναι

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \text{rad/s}$$



Σχήμα 2

Έτσι η (9) γράφεται

$$x = 0,4 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ SI. (10)}$$

iii) Η δύναμη του ελατηρίου είναι $F_{\varepsilon\lambda} = kx$ άρα με βάση τη (10) $F_{\varepsilon\lambda} = 960 \cdot 0,4\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ ή

$$F_{\varepsilon\lambda} = 384\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ SI}$$

iv) Οι δυνάμεις τριβής στα σημεία επαφής με βάση τις (5) , (6) και (10) είναι

$$T_1 = 20 - 8\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI) και } T_2 = 20 + 8\eta\mu\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (SI)}$$

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης