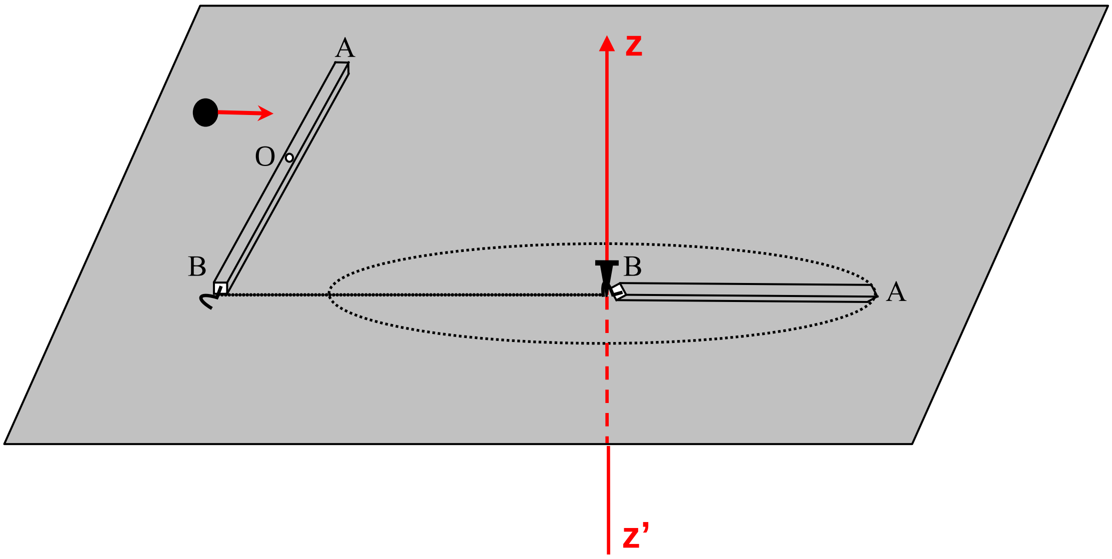
Σύνθετη κίνηση δοκού και ο γάντζος…

Πάνω σε μια λεία επιφάνεια ηρεμεί μια ομογενής δοκός ΑΒ μήκους L=4m και μάζας M=2kg, η οποία στο άκρο της Β φέρει γάτζο αμελητέας μάζας. Σε μια στιγμή t=0 ένα κινούμενο υλικό σημείο Σ, συγκρούεται με τη δοκό με αποτέλεσμα, αμέσως μετά την κρούση το άκρα Α της δοκού να αποκτά ταχύτητα u_A=40m/s και το κέντρο μάζας της Ο u_{cm}=30m/s αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα . Όταν η δοκός αποκτήσει τον ίδιο προσανατολισμό για $1^η$ φορά μετά την t=0 γαντζώνεται σε καρφί που βρίσκεται σε ορισμένη απόσταση από την δοκό στην διεύθυνση του άκρου Β..



α) Η κρούση του υλικού σημείου με τη δοκό έγινε:

i) στο κέντρο μάζας Ο της δοκού.

ii) σε σημείο μεταξύ του κέντρου Ο της δοκού και του άκρου της Α.

iii) σε σημείο μεταξύ του κέντρου Ο της δοκού και του άκρου της Β.

β) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της δοκού, γύρω από το κέντρο μάζας της Ο.

γ) Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου Β της δοκού αμέσως μετά την κρούση.

δ) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της δοκού αμέσως μετά το γάτζωμα της στο καρφί.

ε) Ποιο σημείο της δοκού, μετά το γάτζωμα στο καρφί, έχει την ίδια κατά μέτρο γραμμική ταχύτητα με το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας λίγο πριν η δοκός γατζωθεί στο καρφί;

στ)Να βρεθεί το μέτρο της σταθερής ροπής που πρέπει να επιδράσει στη δοκό ώστε να ακινητοποιηθεί σε χρόνο Δt=5s μετά το γάτζωμα.

ζ) Να βρεθεί το μήκος της τροχιάς που έχει διαγράψει το σημείο Ο από την χρονική στιγμή t=0 μέχρι η δοκός να πάψει να περιστρέφεται.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς άξονα κάθετο σε αυτή που διέρχεται από το κέντρο μάζας της

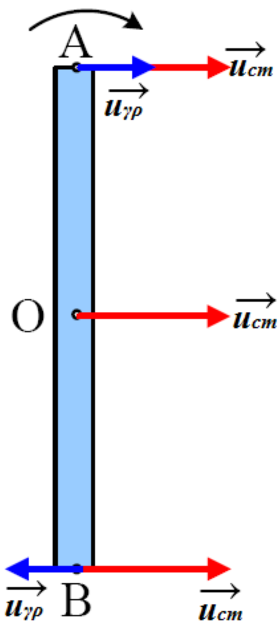
$I_{cm}=\frac{1}{12}ML^2$

Λύση:

α) Εάν η κρούση γινόταν στο κέντρο μάζας της σανίδας, αυτή αμέσως μετά θα πραγματοποιούσε μόνο μεταφορική κίνηση. Όμως, αφού οι ταχύτητες των δύο σημείων Α και Ο είναι διαφορετικές, η ράβδος δεν κάνει μεταφορική κίνηση. Άρα, η κρούση δεν μπορεί να έγινε στο κέντρο μάζας Ο.

Αν η δοκός έκανε μόνο στροφική κίνηση θα στρεφόταν γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο και η ταχύτητα του cm θα ήταν μηδενική. Συνεπώς η δοκός εκτελεί σύνθετη κίνηση με u_{cm}=30m/s και γωνιακή ταχύτητα ω. Έτσι το άκρο Α έχει και ταχύτητα ίδια με το Ο, u_{cm} και γραμμική ταχύτητα $u_{γρ}$=ω·L, όπου:

$$\vec{u}_A = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{γρ}$$



και επειδή η ταχύτητα του σημείου Α είναι μεγαλύτερη κατά μέτρο από αυτή του κέντρου μάζας, τα διανύσματα $\vec{u}_{cm}$ και $\vec{u}_{γρ}$ θα είναι ομόρροπα. Άρα, αμέσως μετά την κρούση η σανίδα περιστρέφεται δεξιόστροφα. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η κρούση να έγινε σε σημείο μεταξύ του σημείου Ο και του άκρου Α.

β) $$u_A = u_{cm} + ω\frac{L}{2} \rightarrow ω = \frac{2(u_A - u_{cm})}{L} \rightarrow \boldsymbol{ω = 5rad/s}$$

γ) Για την ταχύτητα του σημείου Β ισχύει ότι:

$$\vec{u}_B = \vec{u}_{cm} + \vec{u}_{γρ}$$

και επειδή στο άκρο Β τα διανύσματα $\vec{u}_{cm}$ και $\vec{u}_{γρ}$ θα είναι αντίρροπα:

$$u_B = u_{cm} - ω\frac{L}{2} \rightarrow u_B = 30 - 5\cdot 2 \rightarrow \boldsymbol{u_B = 20m/s}$$

δ) Η κίνηση της δοκού αμέσως μετά την κρούση είναι ευθύγραμμη ομαλή και ταυτόχρονα ομαλή στροφική γύρω από νοητό άξονα πού διέρχεται από το κέντρο μάζας της δοκού.

Η στροφορμή ως προς τον άξονα z'z που είναι κάθετος στο επίπεδο κίνησης της ράβδου και διέρχεται από το καρφί παραμένει σταθερή.

$$L_{αρχ} = L_{τελ}$$

$$I_{cm}\cdot ω + Mu_{cm}\cdot\frac{L}{2} = I_{z'z}\cdot ω'$$

$$\frac{1}{12}ML^2ω + Mu_{cm}\frac{L}{2} = \frac{1}{3}ML^2\cdot ω'$$

$$ω' = \frac{MLω + 6M\cdot u_{cm}}{4ML} = \frac{2\cdot 4\cdot 5 + 6\cdot 2\cdot 30}{4\cdot 2\cdot 4}$$

$$\boldsymbol{ω' = 12,5rad/s}$$

ε) Έστω d η απόσταση του ζητούμενου σημείου από τον άξονα z'z.

$$u_{\gamma\rho} = u_{cm} \rightarrow \omega' \cdot d = u_{cm} \rightarrow d = \frac{u_{cm}}{\omega'} \rightarrow \boldsymbol{d = 2,4m}$$

στ) Η δοκός με την δράση σταθερής ροπής θα επιβραδυνθεί στροφικά αποκτώντας γωνιακή επιτάχυνση

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-12,5}{5} = -2,5\text{rad/s}^2$$

Από θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης

$$\Sigma\tau = I_{z'z} \cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

$$\Sigma\tau = \frac{1}{3}ML^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

$$\Sigma\tau = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4^2 \cdot (-2,5)$$

$$\boldsymbol{\Sigma\tau = -\frac{80}{3} N \cdot m}$$

ζ) Το κέντρο μάζας της δοκού έχει διαγράψει τροχιά μήκους

$$\ell = \Delta x_{cm} + \Delta s$$

όπου Δx_{cm} το μήκος που διέγραψε κινούμενο ευθύγραμμα και ομαλά μέχρι η δοκός να γαντζωθεί και Δs το μήκος του τόξου που διέγραψε περιστρεφόμενο μετά το γάντζωμα μέχρι η δοκός να σταματήσει να περιστρέφεται.

Η δοκός συναντά το καρφί εφόσον έχει κάνει μία πλήρη περιστροφή. Επειδή η στροφική κίνηση είναι ομαλή ισχύει

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 0,4\pi \text{ s}$$

και στον ίδιο χρόνο το κέντρο μάζας της δοκού μετατοπίζεται κατά

$$\Delta x_{cm} = u_{cm} \cdot T = 30 \cdot 0,4\pi = 37,68\text{m}$$

Μέχρι να ακινητοποιηθεί η δοκός μετά το γάτζωμά της έχει διαγράψει γωνία στροφής

$$\Delta\theta = \omega' \Delta t - \frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\Delta t^2$$

$$\Delta\theta = 12,5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2,5 \cdot 5^2$$

$$\Delta\theta = 31,25 rad$$

Και το μήκος τόξου που έχει διαγράψει το κέντρο της Ο είναι

$$\Delta s = \Delta\theta \cdot \frac{L}{2}$$

$$\Delta s = 62,5\text{m}$$

Άρα:

$$\ell = 37,68 + 62,5$$

$$\boldsymbol{\ell = 100,18\text{m}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Πέτρος Καραπέτρος