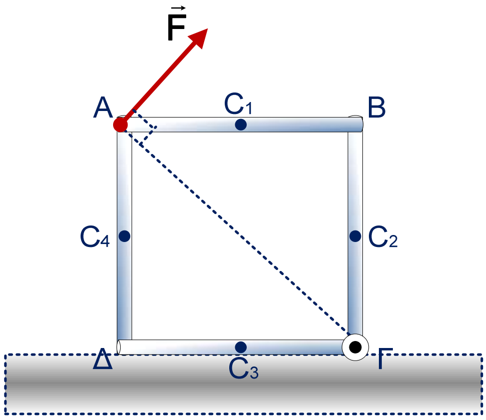
Στρεφόμενο Πλαίσιο

Το τετράγωνο πλαίσιο του παρακάτω σχήματος το οποίο ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο, αποτελείται από 4 όμοιες ομογενείς ράβδους μήκους $\ell = 60cm$ και μάζας $m = 0,5Kg$ η κάθε μια. Η κορυφή Γ του πλαισίου, γύρω από την οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, είναι στερεωμένη στο οριζόντιο επίπεδο.

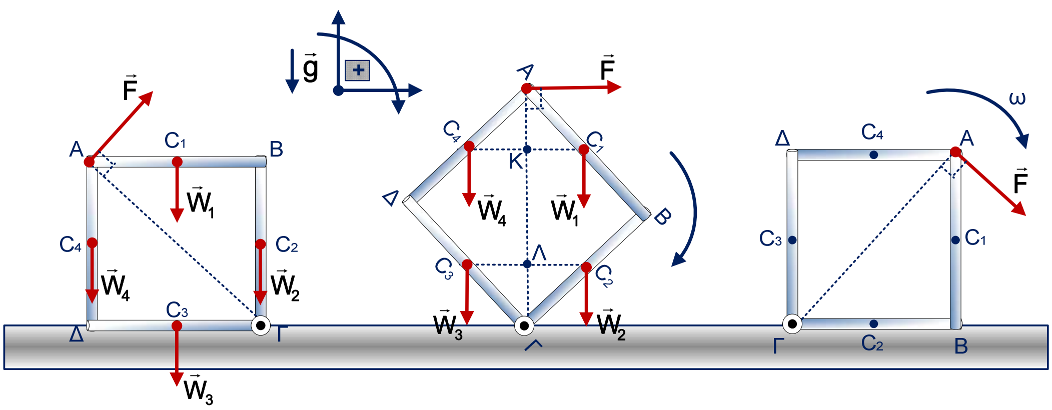


Τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκείται στη κορυφή A του πλαισίου σταθερή (κατά μέτρο) δύναμη $F = 10\sqrt{2}N$, όπως φαίνεται στο σχήμα ($\vec{F} \perp$ ΑΓ).

1. Να προσδιοριστεί η ροπή αδράνειας του πλαισίου ως προς οριζόντιο άξονα, κάθετο στο επίπεδο ΑΒΓΔ, ο οποίος διέρχεται από το Γ.
2. Να εξετάσετε εάν το πλαίσιο, λόγω της δύναμης F θα περιστραφεί προς τα δεξιά. Αν ναι, να προσδιοριστεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση.
3. Να προσδιοριστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του πλαισίου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Γ, τη στιγμή κατά την οποία η διαγώνιος ΑΓ είναι κατακόρυφη.
4. Να προσδιοριστεί το έργο της δύναμης F, ως την στιγμή που η πλευρά ΓΒ του πλαισίου, ακουμπά το οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 7,92$ rad/sec.

Δίνεται: $I_{cm\ (\text{ράβδου})} = \frac{1}{12}m\ell^2$, $g = 10\ m/s^2$

Απάντηση:



Ερώτημα 1:

Η ροπή αδράνειας του πλαισίου ως προς οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο του, ο οποίος διέρχεται από το Γ είναι:

$$I_\Gamma = I_{AB(\Gamma)} + I_{B\Gamma(\Gamma)} + I_{\Gamma\Delta(\Gamma)} + I_{\Delta A(\Gamma)} \xrightarrow[I_{AB(\Gamma)}=I_{\Delta A(\Gamma)}]{I_{B\Gamma(\Gamma)}=I_{\Gamma\Delta(\Gamma)}} I_\Gamma = 2I_{AB(\Gamma)} + 2I_{B\Gamma(\Gamma)}$$

Προσδιορισμός των ροπών αδράνειας $I_{AB(\Gamma)}$ & $I_{B\Gamma(\Gamma)}$

$$\begin{cases} I_{AB(\Gamma)} = I_{C_1} + m\cdot(\Gamma C_1)^2 \\ I_{B\Gamma(\Gamma)} = I_{C_2} + m\cdot(\Gamma C_2)^2 \end{cases} \xrightarrow{I_{C_1}=I_{C_2}=\frac{1}{12}m\ell^2} \begin{cases} I_{AB(\Gamma)} = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\cdot\left(\ell^2+\frac{\ell^2}{4}\right) \\ I_{B\Gamma(\Gamma)} = \frac{1}{12}m\ell^2 + m\cdot\frac{\ell^2}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{I_{AB(\Gamma)} = \frac{4}{3}m\ell^2} \\ \boxed{I_{B\Gamma(\Gamma)} = \frac{1}{3}m\ell^2} \end{cases}$$

Τελικά:

$$I_\Gamma = 2I_{AB(\Gamma)} + 2I_{B\Gamma(\Gamma)} \Rightarrow I_\Gamma = 2\cdot\frac{4}{3}m\ell^2 + 2\cdot\frac{1}{3}m\ell^2 \Rightarrow \boxed{I_\Gamma = \frac{10}{3}m\ell^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_\Gamma = \frac{10}{3}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6^2\ \mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m}^2 \Rightarrow \boxed{I_\Gamma = 0{,}6\ \mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m}^2}$$

Ερώτημα 2:

Το πλαίσιο για να αρχίσει να περιστρέφεται προς τα δεξιά γύρω από το Γ πρέπει το μέτρο της ροπής της $\vec{F}$ ως προς το Γ να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της συνισταμένης ροπής των 4 βαρών ως προς το ίδιο σημείο. Δηλαδή:

$$\tau_F > \tau_{W_1} + \tau_{W_2} + \tau_{W_3} + \tau_{W_4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\cdot(A\Gamma) > W_1\cdot(BC_1) + W_2\cdot 0 + W_3\cdot(\Gamma C_3) + W_4\cdot(\Delta\Gamma) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(A\Gamma)=\sqrt{\ell^2+\ell^2}=\ell\sqrt{2}} F\cdot\ell\sqrt{2} > mg\cdot\frac{\ell}{2} + 0 + mg\cdot\frac{\ell}{2} + mg\cdot\ell \Rightarrow F\cdot\ell\sqrt{2} > 2\cdot mg\ell \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{F > mg\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow F > 0{,}5\cdot 10\cdot\sqrt{2}\ \mathrm{N} \Rightarrow \boxed{F > 5\sqrt{2}\ \mathrm{N}}$$

Άρα για να έχουμε περιστροφή πρέπει η δύναμη F να είναι μεγαλύτερη από $5\sqrt{2}$N. Όμως $F = 10\sqrt{2}$ N ⇒ άρα το πλαίσιο θα περιστραφεί προς τα δεξιά με την εφαρμογή της δύναμης F.

Παρατηρήσεις:

1. **Στην οριακή περίπτωση κατά την οποία το πλαίσιο αρχίζει να περιστρέφεται, χάνει την επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο ⇒ άρα δεν δέχεται δύναμη από αυτό (N = 0).**
2. **Αρχικά η ροπή της F ως προς το Γ είναι μεγαλύτερη κατά μέτρο από τη συνιστάμενη ροπή των βαρών W_1, W_3 & W_4 ως προς το ίδιο σημείο. Στην συνέχεια στη ροπή της δύναμης F προστίθεται και η ροπή**

του βάρους W_2, η οποία είναι διαρκώς δεξιόστροφη και αυξάνεται. Αντίθετα η ροπή του βάρους W_3 είναι αριστερόστροφη και συνεχώς μειώνεται, ως που μηδενίζεται τη στιγμή που η πλευρά ΒΓ του πλαισίου γίνεται παράλληλη με το οριζόντιο επίπεδο. Επιπλέον η ροπή του βάρους W_1 αρχικά είναι αριστερόστροφη και μειώνεται, ενώ όταν το σημείο C_1 ξεπεράσει την κατακόρυφη που διέρχεται από το σημείο Γ καθίσταται δεξιόστροφη και αυξάνεται. Ομοίως και για την ροπή του βάρους W_4.

Αρχική γωνιακή επιτάχυνση: ⇒ Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νομό της μηχανικής (χρησιμοποιούμε και την παρατήρηση 1):

$$\Sigma\vec{\tau}_{\Gamma(\alpha\rho\chi.)} = I_\Gamma \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.(\alpha\rho\chi.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\cdot(A\Gamma) - W_1\cdot(BC_1) + W_2\cdot 0 - W_3\cdot(\Gamma C_3) - W_4\cdot(\Delta\Gamma) = I_\Gamma\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.(\alpha\rho\chi.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F\cdot\ell\sqrt{2} - mg\cdot\frac{\ell}{2} + 0 - mg\cdot\frac{\ell}{2} - mg\cdot\ell = \frac{10}{3}\cdot m\ell^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.(\alpha\rho\chi.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.(\alpha\rho\chi.)} = \frac{3\ell\cdot(F\sqrt{2}-2mg)}{10m\ell^2} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.(\alpha\rho\chi.)} = \frac{3\cdot(F\sqrt{2}-2mg)}{10m\ell} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.(\alpha\rho\chi.)} = \frac{3\cdot(10\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} - 2\cdot 0{,}5\cdot 10)}{10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6}\,\frac{rad}{s} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.(\alpha\rho\chi.)} = 10\,\frac{rad}{s}$$

Ερώτημα 3:

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του πλαισίου, τη στιγμή που η διαγώνιος του ΑΓ γίνεται κατακόρυφη είναι:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta L}}{\Delta t} = \sum\vec{\tau}_{(\Gamma)} = \vec{\tau}_F + \vec{\tau}_{w_1} + \vec{\tau}_{w_2} + \vec{\tau}_{w_3} + \vec{\tau}_{w_4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = F\cdot(A\Gamma) + mg\cdot(KC_1) + mg\cdot(\Lambda C_2) - mg\cdot(\Lambda C_3) - mg\cdot(KC_4) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(KC_1)=(\Lambda C_2)=(\Lambda C_3)=(KC_4)=\frac{\ell}{2}\cdot\eta\mu 45^0=\frac{\ell\sqrt{2}}{4}} \frac{\Delta L}{\Delta t} = F\cdot(A\Gamma) + 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = F\cdot\ell\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\cdot 0{,}6\cdot\sqrt{2}\,Kg\cdot\frac{m^2}{s^2} = 12\,Kg\cdot\frac{m^2}{s^2}$$

Ερώτημα 4:

Για να προσδιορίσω το έργο της δύναμης $\vec{F}$ εφαρμόζω Αρχή διατήρησης της ενεργείας (Αρχική θέση ⇒ Τελική θέση):

$$K_{\alpha\rho\chi.} + U_{\alpha\rho\chi.} + W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda.} + U_{\tau\varepsilon\lambda.} \xrightarrow{K_{\alpha\rho\chi.}=0 \quad U_{\alpha\rho\chi.}=U_{\tau\varepsilon\lambda.}} W_F = K_{\tau\varepsilon\lambda.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = \frac{1}{2}I_\Gamma\omega^2 \xrightarrow{I_\Gamma=\frac{10}{3}m\ell^2} W_F = \frac{5}{3}\cdot m\ell^2\omega^2 \Rightarrow W_F = \frac{5}{3}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}6^2\cdot 7{,}92^2\,J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_F = 18{,}81\,J$$

Σχόλιο! Το έργο της δύναμης F, εκφράζει την προσφερόμενη ενέργεια στο πλαίσιο.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης

Τσόμπος Κωστής