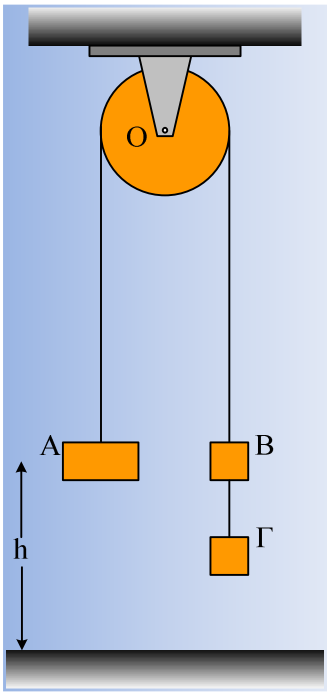
Στρεφόμενο σύστημα και μια γραφική παράσταση.



Ένας κύλινδρος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, που περνά από τα κέντρα των δύο βάσεών του, ο οποίος απέχει 6m από το έδαφος. Γύρω από τον κύλινδρο έχουμε τυλίξει **δύο ανεξάρτητα αβαρή νήματα** ικανού μήκους, στα άκρα των οποίων δένονται τα σώματα Α, Β και Γ, όπως στο σχήμα. Το σύστημα ισορροπεί, ενώ είναι γνωστές οι μάζες των σωμάτων Α και Β, m_1=2kg και m_2=1kg αντίστοιχα, τα οποία βρίσκονται σε ύψος h=2m, από το έδαφος. Δίνεται η ακτίνα του κυλίνδρου R=0,2m, η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονά του $I= ½\ MR^2$ και $g=10m/s^2$.

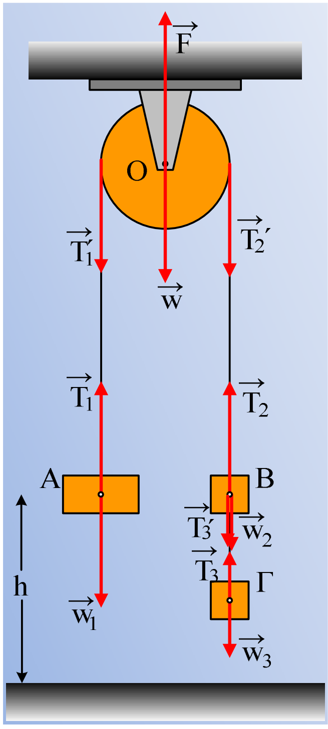
i) Να αποδείξτε ότι η μάζα του σώματος Γ είναι 1kg.

ii) Σε μια στιγμή t=0 κόβουμε το νήμα που συνδέει τα σώματα Β και Γ και παρατηρούμε ότι το σώμα Α φτάνει στο έδαφος τη στιγμή t_1=2s, όπου και ακινητοποιείται. Να αποδείξτε ότι η κίνησή του ήταν ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και να υπολογίσετε την μάζα του κυλίνδρου.

iii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του κυλίνδρου καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της, τη χρονική στιγμή t_2=1s.

iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της στροφορμής του κυλίνδρου σε συνάρτηση με το χρόνο από 0-4s.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα. Από την ισορροπία των σωμάτων Α, Β και Γ έχουμε:

$\Sigma F_1=0 \rightarrow T_1=m_1g$ (1), όπου $T_1=T_1'$ η τάση του νήματος.

$\Sigma F_3=0 \rightarrow T_3=m_3g$ (2), όπου $T_3=T_3'$ η τάση του νήματος μεταξύ του Β και Γ.

$\Sigma F_2=0 \rightarrow T_2=T_3'+m_2g \rightarrow T_2=T_2'= (m_3+m_2)g$ (3).

Αλλά και ο κύλινδρος ισορροπεί:

$\Sigma \tau_O=0 \rightarrow T_1'R-T_2'R=0 \rightarrow T_1'= T_2'$ (4)

Από (1), (3) και (4) παίρνουμε $m_1g= (m_3+m_2)g \rightarrow m_1g= (m_3+m_2)g \rightarrow$

$m_3= m_1-m_2$=2kg-1kg=1kg.

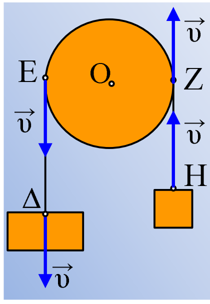
ii) Κόβοντας το νήμα που συνδέει τα σώματα Β και Γ, το σώμα Α κινείται προς τα κάτω, οπότε ο κύλινδρος στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και το νήμα που δένεται το σώμα Β, μαζεύεται, οπότε αυτό κινείται προς τα πάνω. Οι δυνάμεις είναι οι ίδιες, αλλά οι τάσεις των νημάτων έχουν διαφορετικά μέτρα.

Εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για τα σώματα Α και Β και για την στροφική κίνηση του κυλίνδρου και παίρνουμε (θεωρούμε την φορά περιστροφής του κυλίνδρου θετική, όπως και την φορά κατά την οποία κινείται θετική, για κάθε σώμα):

$\Sigma F_1=m_1\alpha_1 \rightarrow m_1g-T_1=m_1\alpha_1$ (4)

$\Sigma F_2=m_2\alpha_2 \rightarrow T_2-m_2g = m_2\alpha_2$ (5)

$\Sigma\tau=I\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1΄R-T_2΄R = ½\, MR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1-T_2= ½\, MR\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (6)



Αλλά έστω τα σημεία Δ,Ε,Ζ και Η του διπλανού σχήματος, για τα οποία, ανά δύο (Δ, Ε) και (Ζ, Η) έχουν ταχύτητες με ίσα μέτρα, αφού είναι σημεία του ίδιου νήματος, ενώ τα Ε και Ζ έχουν επίσης ταχύτητες ίσου μέτρου αφού $\upsilon_E=\omega R$ και $\upsilon_Z=\omega R$, μιας και είναι και σημεία της περιφέρειας του κυλίνδρου. Άρα:

$\upsilon_\Delta= \upsilon_E=\upsilon_Z=\upsilon_H$ ή $\upsilon_\Delta= \omega R=\upsilon_H$ και με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon_\Delta}{dt}=\frac{d(\omega R)}{dt}=\frac{d\upsilon_H}{dt} \text{ ή } \alpha_1=\alpha_2=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R \quad (7)$$

Με πρόσθεση των (4)+(5)+(6) και με την βοήθεια της (7) παίρνουμε:

$$m_1g-m_2g=(m_1+m_2+ ½M)\cdot\alpha \quad (8)$$

Από την εξίσωση (8) προκύπτει ότι η επιτάχυνση του σώματος Α είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη.

Για την κίνηση του Α λοιπόν, μέχρι να φτάσει στο έδαφος θα ισχύει $h= ½\, at^2 \rightarrow$

$$a=\frac{2h}{t^2}=\frac{2\cdot 2}{2^2}m/s^2=1m/s^2$$

Λύνοντας εξάλλου την (8) ως προς Μ παίρνουμε:

$$M=\frac{2(m_1-m_2)g}{a}-2(m_1+m_2)=\frac{2(2-1)\cdot 10}{1}kg-2(2+1)kg=14kg$$

iii) Τη στιγμή t_1=1s το σώμα Α έχει ταχύτητα $\upsilon_1=\alpha\cdot t_1$=1m/s, οπότε ο κύλινδρος θα έχει γωνιακή ταχύτητα

$$\omega=\frac{\upsilon_{\gamma\rho}}{R}=\frac{\upsilon_A}{R}=\frac{1}{0,2}rad/s=5rad/s$$

Συνεπώς έχει κινητική ενέργεια $K= ½\, I\omega^2 = ½\, ½\, MR^2\omega^2= ¼\, M\upsilon_A^2$ και με αντικατάσταση:

$$K= ¼\; 14\cdot 1J=3{,}5J.$$

Εξάλλου ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt}=\Sigma\tau\cdot\omega=(T_1R-T_2R)\cdot\omega=(T_1-T_2)\cdot R\omega=(T_1-T_2)\cdot\upsilon_A \xrightarrow{(6)}$$

$$\frac{dK}{dt}=\frac{1}{2}Ma\cdot\upsilon_A=\frac{1}{2}14\cdot 1\cdot 1J/s=7J/s$$

iv) Μόλις το σώμα Α φτάσει στο έδαφος, ο κύλινδρος αρχίζει να επιβραδύνεται (ροπή και κατά συνέπεια γωνιακή επιτάχυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα) εξαιτίας της ροπής της τάσης του νήματος που κρέμεται το Β σώμα. Δουλεύοντας λοιπόν με τα μέτρα των μεγεθών έχουμε:

Για το σώμα Β: $\Sigma F=m_2\cdot\alpha_1 \rightarrow m_2g-T= m_2\cdot\alpha_1$ (9)

Για τον κύλινδρο: $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu 1} \rightarrow T\cdot R= ½\, MR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T= ½\, MR\cdot\alpha\gamma\omega\nu$ (10)

Αλλά και εδώ έχουμε $α_1=α_{γων}\cdot R$, οπότε με πρόσθεση των (9) και (10) παίρνουμε:

$$m_2g = (m_2+ ½ M)\cdot α_1 \rightarrow a_1 = \frac{m_2 g}{m_2 + \frac{1}{2}M} = \frac{10}{1+\frac{1}{2}14} m/s^2 = \frac{5}{4} m/s^2$$

Με βάση αυτά για την στροφορμή του κυλίνδρου έχουμε:

Από 0-2s: $L=I\cdot ω= ½ MR^2\cdot α_{γων}\cdot t = ½ MR\cdot α\cdot t =1{,}4t$ (μονάδες στο S.I.)

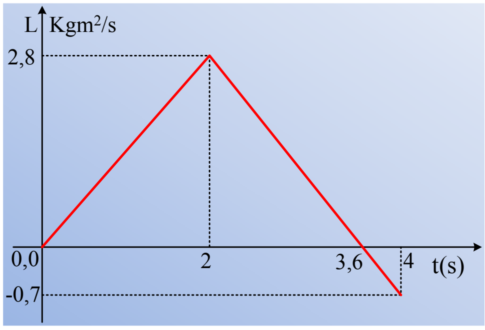
Από 2s-4s: $L=I\cdot ω= ½ MR^2\cdot(ω_0-α_{γων1}\cdot Δt)$

Όπου $\omega_0 = \frac{\upsilon_A}{R} = \frac{at_1}{R} = \frac{1\cdot 2}{0{,}2} rad/s = 10 rad/s$, $α_{γων1}=α_1/R=25/4 rad/s^2$ και $Δt=t-2$, συνεπώς:

$L=I\cdot ω= ½ MR^2\cdot(ω_0-α_{γων1}\cdot Δt)= ½\ 14\cdot 0{,}2^2\cdot[10-\frac{25}{4}(t-2)] =6{,}3-3{,}5t$ (S.I.)

Έτσι κάποιες χαρακτηριστικές τιμές της στροφορμής φαίνονται στον πίνακα, ενώ η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι του διπλανού σχήματος:

t(s)	***L (kgm²/s***
0,0	0,0
2,0	2,8
3,6	0,0
4,0	-0,7



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης