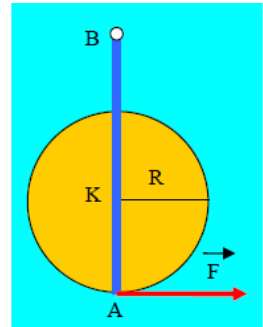


Ροπή δύναμης περιστρέφει σύστημα και κάποια στιγμή καταργείται

Ένας δίσκος μάζας $m = 4 \text{ kg}$ ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ και μια λεπτή ομογενής ράβδος AB μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και μήκους $\ell = 3R$ ενώνονται έτσι ώστε τμήμα της ράβδου ίσο με $2R$ να συμπίπτει με μια διάμετρο του δίσκου. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο B της ράβδου και είναι κάθετος σ' αυτήν. Αρχικά η ράβδος είναι κατακόρυφη και το σύστημα ηρεμεί. Από τη θέση αυτή, αρχίζει να στρέφεται με την επίδραση δύναμης σταθερού μέτρου $F = (700/3\pi)\text{N}$ που ασκείται κάθετα στη ράβδο και εφαπτομενικά στο δίσκο στο σημείο A , όπως φαίνεται στο σχήμα. Η δύναμη, παύει να ασκείται όταν η ράβδος γίνει οριζόντια για πρώτη φορά.



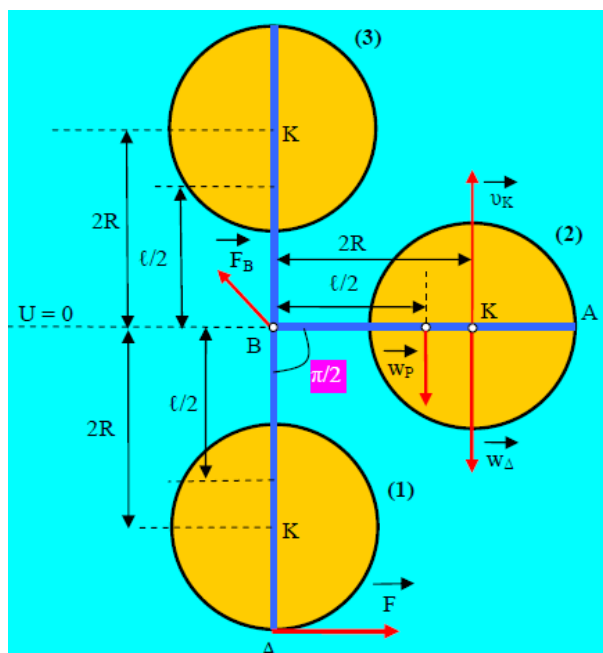
I. Να υπολογιστούν:

- i) Το συνολικό έργο της δύναμης \mathbf{F} .
- ii) Η κινητική ενέργεια του συστήματος την στιγμή που παύει να ασκείται η δύναμη \mathbf{F} .
- iii) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου όταν η ράβδος γίνει οριζόντια για πρώτη φορά.
- iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου όταν η ράβδος είναι οριζόντια, αμέσως μετά που θα καταργηθεί η δύναμη \mathbf{F} .

II. Να εξετάσετε αν το σύστημα θα κάμει ανακύκλωση.

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$, ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_B = M\ell^2/3$ και ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση



- i) Το έργο της δύναμης \vec{F} είναι $W_F = F\ell\theta$ ή $W_F = F\ell\pi/2 = \frac{700}{3\pi} \cdot 3 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{\pi}{2} \text{J} = 70\text{J}$ (1)

ii) Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση από την θέση (1) μέχρι τη θέση (2) - όπως φαίνεται στο σχήμα - κι έχουμε:

$$U_{\rho_1} + U_{\Delta_1} + K_1 + W_F = U_{\rho_2} + U_{\Delta_2} + K_2 \quad \text{ή}$$

$-Mg\ell/2 - mg2R + 0 + W_F = K_2$ και με βάση τη σχέση (1) και τα δεδομένα προκύπτει $K_2 = 48j$ (2)

iii) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας K του δίσκου στην οριζόντια θέση είναι $v_K = \omega 2R$ (3)

Η κινητική ενέργεια του συστήματος στην οριζόντια θέση δίνεται από τη σχέση $K = \frac{1}{2} I_{\text{ολ(B)}} \cdot \omega^2$ (4)

όπου $I_{\text{ολ(B)}}$ η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής. Θα έχουμε λοιπόν

$$I_{\text{ολ(B)}} = \frac{1}{3} M\ell^2 + \frac{1}{2} mR^2 + m(2R)^2 = \frac{1}{3} M(3R)^2 + \frac{1}{2} 2MR^2 + 2M4R^2 = 12MR^2 \quad (5)$$

οπότε η (4) με βάση την (5) γράφεται $\frac{1}{2} \cdot 12MR^2 \omega^2 = K_2$ και με βάση την (2) και τα δεδομένα προ-

κύπτει $\omega = 10 \text{ rad/s}$ (6).

Από την (3) με βάση την (6) για $R = 0,2\text{m}$ προκύπτει $v_K = 4 \text{ m/s}$.

Η φορά της ταχύτητας \vec{v}_K φαίνεται στο σχήμα.

iv) Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου είναι $\frac{dL}{dt} = I_{\Delta(B)} \alpha_\gamma$ (7) όπου $I_{\Delta(B)}$ η ροπή

αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής και α_γ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του συστήματος στην οριζόντια θέση, αμέσως μετά την κατάργηση της δύναμης \vec{F} .

Για τη ροπή αδράνειας του δίσκου με βάση το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων έχουμε

$$I_{\Delta(B)} = \frac{1}{2} mR^2 + m(2R)^2 = \frac{9}{2} mR^2 \quad (8)$$

Με εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της στροφικής κίνησης για το σύστημα στην ίδια θέση μετά την κατάργηση της δύναμης \vec{F} έχουμε

$$\Sigma \tau_{(B)} = I_{\text{ολ(B)}} \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad w_\Delta 2R + w_P \ell/2 + F_B \cdot 0 = I_{\text{ολ(B)}} \alpha_\gamma$$

και με βάση την (5) και τα δεδομένα

$$mg2R + Mg3R/2 = 12MR^2 \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad 2mg + 3Mg/2 = 12MR \alpha_\gamma \quad \text{ή} \quad 2(2M)g + 3Mg/2 = 12MR \alpha_\gamma \quad \text{ή}$$

$$\alpha_\gamma = \frac{11g}{24R} \quad (9)$$

Από την (7) με βάση τις (8) και (9) έχουμε

$$\frac{dL}{dt} = \frac{9mR^2}{2} \cdot \frac{11g}{24R} = \frac{33}{16} mgR = 16,5 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 \quad \text{και} \quad \text{κατεύθυνση} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} \odot$$

II. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση από τη θέση (1) μέχρι τη θέση (3) στην οποία υποθέτουμε ότι φθάνει το σύστημα κι έχουμε

$$U_{\rho 2} + U_{\Delta 2} + K_2 = U_{\rho 3} + U_{\Delta 3} + K_3 \quad \text{ή}$$

$$0 + 0 + K_2 = Mg \frac{\ell}{2} + mg2R + K_3$$

$$0 + 0 + K_2 = Mg \frac{3R}{2} + 2Mg2R + K_3 \quad \text{ή}$$

$$K_3 = K_2 - \frac{11MgR}{2} = 26j > 0 \quad \text{άρα το σύστημα θα κάμει ανακύκλωση.}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης