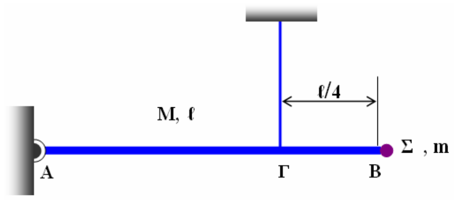
Ράβδος με σφαιρίδιο αρχικά ισορροπεί και κάποια στιγμή αρχίζει η περιστροφή τους

Η λεπτή ομογενής ράβδος ΑΒ που φαίνεται στο σχήμα, είναι αρθρωμένη στο άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο, και στο άλλο άκρο της Β είναι στερεωμένο σφαιρίδιο Σ μάζας $m = 2$ kg , αμελητέων διαστάσεων. Το μήκος της ράβδου είναι $\ell = 4$ m και η μάζα της είναι $M = 6$ Kg.



Η ράβδος, κρατείται στην οριζόντια θέση με τη βοήθεια κατακόρυφου αβαρούς νήματος σταθερού μήκους, που έχει το πάνω άκρο του ακλόνητο και το κάτω άκρο του δεμένο στο σημείο Γ που απέχει από το Β απόσταση $\ell/4$.

Α. Να βρεθεί η τάση του νήματος και η δύναμη της άρθρωσης πάνω στη ράβδο.

Β. Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα και η ράβδος μαζί με το σφαιρίδιο αρχίζουν να περιστρέφονται χωρίς τριβές.

Να υπολογίσετε:

Β1. Την αρχική γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος.

Β2. Την κινητική ενέργεια του συστήματος, τη χρονική στιγμή που το σημείο Γ βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση $h = 3\ell/8$ κάτω από την αρχική οριζόντια θέση της ράβδου.

Β3. Το ρυθμό μεταβολής της μηχανικής ενέργειας του συστήματος την παραπάνω χρονική στιγμή.

Β4. Τη στροφορμή του σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής του συστήματος όταν η ράβδος γίνεται κατακόρυφη για πρώτη φορά.

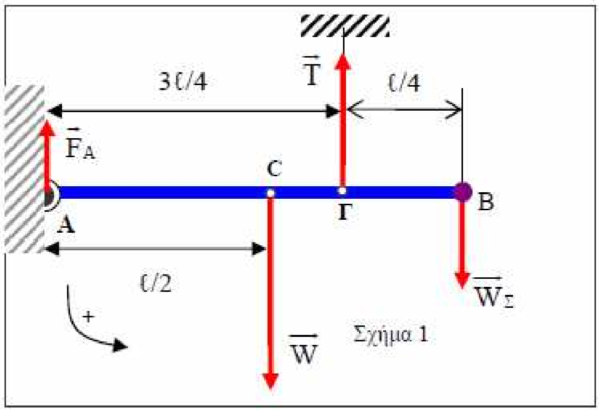
Δίνεται $g = 10$ m/s² και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σ' αυτήν και περνά από το ένα άκρο της υπολογίζεται με τη σχέση $I_A = M\ell^2/3$.

Απάντηση

Α. Επειδή η ράβδος ΑΒ ισορροπεί, ισχύουν

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \ (1) \text{ και } \Sigma F = 0 \ (2).$$

Με βάση το σχήμα 1 οι σχέσεις (1) και (2) γράφονται :



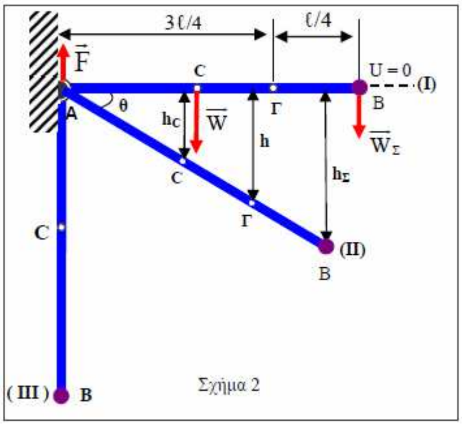
$$T\frac{3\ell}{4} - w_\Sigma \ell - w\frac{\ell}{2} = 0 \text{ ή } T = \frac{4}{3}g\left(m + \frac{M}{2}\right)$$

$$\text{ή } T = \frac{200}{3}\text{N} \ (3) \text{ και}$$

$$F_A + T = w + w_\Sigma \text{ ή } F_A = w + w_\Sigma - T$$

$$\text{ή } F_A = (M+m)g - T \text{ ή με βάση την (3) και τα δεδομένα του προβλήματος } F_A = \frac{40}{3}\text{N}$$

Β1. Η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος στη θέση (Ι) του σχήματος 2, υπολογίζεται από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης $\Sigma\tau_A = I_A \cdot \alpha_\gamma$ (4). Αλλά



Σχήμα 2

$$I_A = \frac{1}{3}M\ell^2 + m\ell^2 = 64\text{Kgm}^2 \ (5) \text{ και}$$

$$\Sigma\tau_A = Mg\frac{\ell}{2} + mg\ell = 200\text{Nm} \ (6).$$

Από την (4) με βάση τις (5) και (6) προκύπτει:

$$\alpha_\gamma = 3{,}125 \text{ rad/s}^2.$$

Β2. Με επίπεδο αναφοράς την αρχική θέση της ράβδου , η αρχή διατήρησης της ενέργειας από την θέση (Ι) μέχρι τη θέση (ΙΙ) γράφεται έτσι:

$$0 = K_{II} - Mgh_C - mgh_\Sigma \text{ ή } K_{II} = Mgh_C + mgh_\Sigma \ (7)$$

Αλλά όπως φαίνεται στο σχήμα 2 ισχύει ότι : $\eta\mu\theta = \frac{h_C}{AC} = \frac{h}{A\Gamma} = \frac{h_\Sigma}{AB}$ ή

$$\frac{h_C}{\ell/2} = \frac{h}{3\ell/4} = \frac{h_\Sigma}{\ell} \text{ άρα } h_\Sigma = \frac{4h}{3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3\ell}{8} = \frac{\ell}{2} = 2\text{ m} \ (8) \text{ και}$$

$$h_\Sigma = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{3\ell}{8} = \frac{\ell}{4} = 1\text{ m} \ \ (9).$$

Έτσι από την (7) με βάση τις (8) και (9) προκύπτει ότι $K_{II} = 100\text{j}$.

Β3. Επειδή δεν υπάρχουν τριβές η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του συστήματος, δηλαδή $E_M = \sigma\tau\alpha\theta.$, ισχύει ότι $\frac{dE_M}{dt} = 0$.

Β4. Το μέτρο της στροφορμής του σφαιριδίου στην κατακόρυφη θέση ΙΙΙ του σχήματος 2 , έχει μέτρο:

$$L_\Sigma = m\ell^2 \cdot \omega^2 \ (10).$$

Με ΑΔΕ από την θέση (Ι) μέχρι τη θέση (ΙΙΙ) έχουμε ότι

$$0 = -Mg\frac{\ell}{2} - mg\ell + \frac{1}{2}I_A\omega^2 \text{ ή } \frac{1}{2}I_A\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2} + mg\ell \text{ ή } \omega = \sqrt{\frac{\ell(Mg + 2mg)}{I_A}}\ .$$

Από τη σχέση αυτή με βάση την (5) και τα δεδομένα προκύπτει $\omega = 2{,}5\text{rad/s}$ (11).

Έτσι από την (10) με βάση την (11) και τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι

$$L_\Sigma = 80\text{kgm}^2/\text{s} \text{ και φορά } \vec{L}_\Sigma \otimes.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης