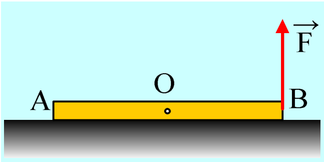
Προσπαθώντας να ανασηκώσουμε μια ράβδο.



Μια λεπτή ομογενής ράβδος μήκους 8m και μάζας 6kg, ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μέσω ενός νήματος, το οποίο έχουμε δέσει στο άκρο της Β, ασκούμε πάνω της μια κατακόρυφη δύναμη F, όπως στο σχήμα.

i) Αν το μέτρο της δύναμης είναι F=20N, παρατηρούμε ότι η ράβδος ισορροπεί. Να σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω της, βρίσκοντας και την ροπή καθεμιάς, ως προς το μέσον της Ο.

ii) Αυξάνουμε το μέτρο της ασκούμενης δύναμης στην τιμή F=30N. Σχεδιάστε ξανά τις δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο.

iii) Αν αυξήσουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F=32N, παρατηρούμε ότι η ράβδος αρχίζει να ανασηκώνεται από το έδαφος.

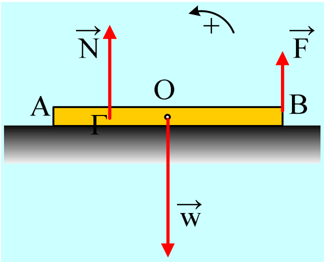
α) Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του μέσου της Ο της ράβδου.

β) Σε μια στιγμή t_1 το άκρο Β της ράβδου, βρίσκεται σε ύψος h=4m από το έδαφος, ενώ το Α σε επαφή με το έδαφος. Για την θέση αυτή να υπολογίσετε την ταχύτητα του Ο και την ταχύτητα του άκρου Α της ράβδου.

γ) Πόσο έχει μετατοπιστεί το άκρο Α της ράβδου από 0-t_1;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα που περνά από το μέσο της $I= M\ell^2/12$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



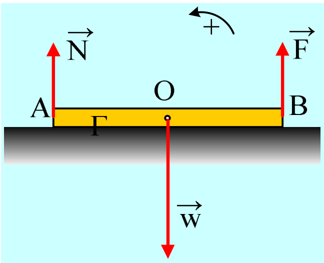
i) Αφού το επίπεδο είναι λείο, η δύναμη από το έδαφος (κάθετη αντίδραση του επιπέδου Ν) είναι και αυτή κατακόρυφη.

Αφού η ράβδος ισορροπεί: $\Sigma F=0 \rightarrow N+F-w=0 \rightarrow N=Mg-F=40N$.

Αλλά και $\Sigma\tau_o=0$. Όμως θεωρώντας θετική φορά, την αντίθετη της φοράς περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, $\tau_F=+F\cdot \frac{1}{2}\ell= +80N\cdot m$, ενώ $\tau_w=0$, οπότε:

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow \tau_N+\tau_w+\tau_F=0 \rightarrow \tau_N=-80N\cdot m$$

Συνεπώς η δύναμη Ν ασκείται σε ένα σημείο Γ, το οποίο απέχει κατά $N\cdot x=80N\cdot m \rightarrow x=2m$ από το μέσον Ο της ράβδου, όπως στο σχήμα.



ii) Αυξάνοντας το μέτρο της δύναμης, δεν ξέρουμε τι θα συμβεί. Ας υποθέσουμε ότι η ράβδος συνεχίζει να ισορροπεί. Τότε:

$$\Sigma F=0 \text{ ή } N+F-w=0 \rightarrow N=30N.$$

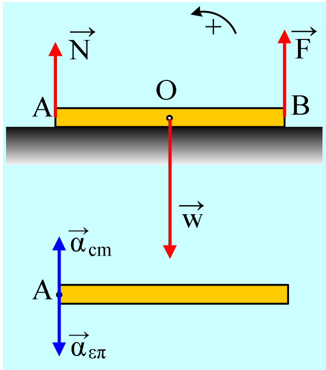
$$\text{Αλλά και } \Sigma\tau_o=0 \rightarrow F\cdot \tfrac{1}{2}\ell+w\cdot 0-N\cdot x=0 \rightarrow x=4m.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο μοχλοβραχίονας της κάθετης αντίδρασης είναι ίσος με αυτόν της δύναμης F, έχοντας και το ίδιο μέτρο. Συνεπώς η ράβδος ισορροπεί και οι δυνάμεις είναι όπως στο διπλανό σχήμα.

iii) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο φαίνονται στο σχήμα. Η ράβδος, ένα ελεύθερο σώμα, δεχόμαστε ότι εκτελεί σύνθετη κίνηση. Μια μεταφορική, σε κατακόρυφη διεύθυνση (αφού όλες οι ασκούμενες δυνάμεις είναι κατακόρυφες) και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της Ο.

α) Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \rightarrow F + N - Mg = M\alpha_{cm} \text{ (1) και}$$

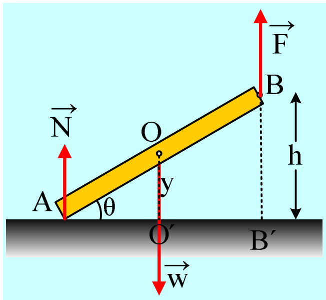


$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot\frac{\ell}{2} - N\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{1}{12}M\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F - N = \frac{1}{6}M\ell a_{\gamma\omega\nu} \text{ (2)}$$

Αλλά τότε το σημείο Α, έχει μια επιτάχυνση ίση με α_{cm}, εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια $\alpha_{\varepsilon\pi}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}$ λόγω της περιστροφικής κίνησης της ράβδου, όπως στο σχήμα. Αλλά το σημείο Α δεν επιταχύνεται κατακόρυφα, οπότε $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}$ και με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη παίρνουμε:

$$2F - Mg = \frac{4}{3}Ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{3(2F-Mg)}{4M} = \frac{3(2\cdot 32 - 6\cdot 10)}{4\cdot 6}m/s^2 = 0{,}5m/s^2$$

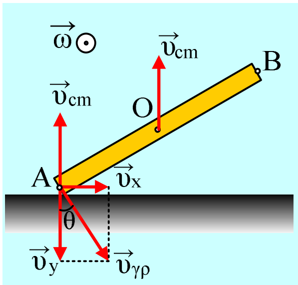
β) Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η ράβδος τη στιγμή t_1. Η γωνία που σχηματίζει με το έδαφος είναι ίση με 30°, αφού ημθ=h/ℓ= ½ . Αλλά τότε το κέντρο μάζας Ο έχει ανέλθει κατά y= ½ h=2m.



Εφαρμόζουμε το ΘΜΚΕ για τη ράβδο από την οριζόντια θέση, μέχρι τη θέση του σχήματος και έχουμε:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_w + W_N \rightarrow \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = F\cdot h - Mg\cdot y \text{ (3)}$$

Το κέντρο μάζας Ο της ράβδου, κινείται κατακόρυφα, αφού όλες οι ασκούμενες δυνάμεις, από την αρχική θέση μέχρι τη στιγμή αυτή, είναι κατακόρυφες. Αλλά τότε το άκρο Α της ράβδου έχει μια κατακόρυφη ταχύτητα υ_{cm} και μια γραμμική $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot$ ½ ℓ, όπως στο σχήμα. Αλλά το σημείο Α δεν κινείται κατακόρυφα, συνεπώς $\upsilon_{cm}=\upsilon_y=\omega\cdot$ ½ ℓ·συνθ, οπότε με αντικατάσταση στην (3) έχουμε:



$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}M\ell^2\omega^2 = F\cdot h - Mg\cdot y \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}M\frac{4\upsilon_{cm}^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} = F\cdot h - Mg\cdot y \rightarrow$$

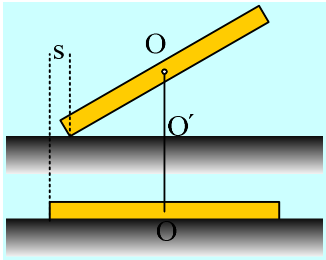
$$\upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{6(Fh - Mgy)}{\left(3 + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\right)M}}$$

και με αντικατάσταση $υ_{cm}≈1,36m/s$.

Αλλά τότε η ταχύτητα του σημείου Α είναι οριζόντια με μέτρο:

$$υ_A=υ_x=υ_y·εφθ=υ_{cm}·εφθ= 0,78m/s.$$

γ) Το κέντρο μάζας Ο της ράβδου κινείται κατακόρυφα. Αρχικά το άκρο Α, απέχει απόσταση ½ ℓ=4m από το μέσον της Ο. Τη στιγμή t_1, όπου η ράβδος σχηματίζει γωνία θ=30° με το έδαφος, το άκρο Α απέχει κατά d= ½ ℓ·συνθ=3,46m, από την κατακόρυφη που περνά από το μέσον Ο της ράβδου. Συνεπώς έχει μετατοπισθεί κατά:



$$s=4m-3,46m=0,54m.$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης