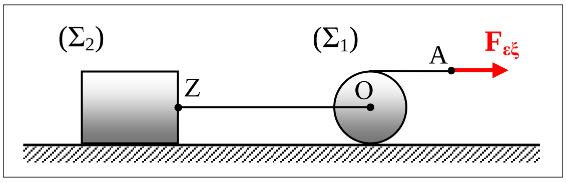
Πρισματικό σώμα και κύλινδρος (I)

Ισορροπία σε οριζόντιο επίπεδο



Πρισματικό σώμα (Σ_2) μάζας $\mathbf{m_2 = 4\ kg}$ και κύλινδρος (Σ_1) μάζας $\mathbf{m_1}$ βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και είναι συνδεδεμένα με νήμα στα σημεία Z και O αντίστοιχα. Η σύνδεση στο κέντρο μάζας O του κυλίνδρου είναι τέτοια ώστε να επιτρέπει την ελεύθερη περιστροφή του γύρω από τον άξονά του που διέρχεται από το σημείο αυτό. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σωμάτων – δαπέδου είναι ίδιος και για τα δύο σώματα, $\mathbf{\mu_{o\lambda} = \mu_{o\rho} = \mu = 0,2}$.

Σε λεπτό αυλάκι γύρω από τον κύλινδρο έχουμε τυλίξει νήμα που το συγκρατούμε από το άκρο του A ασκώντας μικρή οριζόντια δύναμη μέτρου $\mathbf{F_{\varepsilon\xi}}$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα ισορροπεί παραμένοντας ακίνητο.

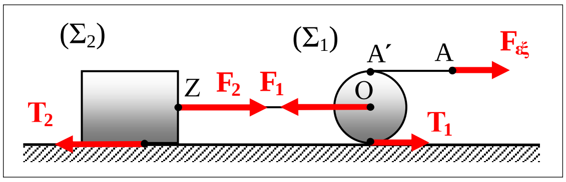
1. Να υπολογίσετε το λόγο $\mathbf{\lambda = m_1/m_2}$ των μαζών των δύο σωμάτων ώστε αν προκαλέσουμε σταδιακή αύξηση στο μέτρο της $\vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon\xi}$:

α) να ολισθήσει πρώτο το Σ_2 *β)* να ολισθήσει πρώτο το Σ_1.

2. Για κάθε μία από τις πιο πάνω περιπτώσεις να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή του μέτρου της $\vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon\xi}$ για την οποία αρχίζει να ολισθαίνει το σώμα Σ_2.

Τα σώματα είναι συμπαγή και ομογενή και το Σ_2 δεν ανατρέπεται. Τα νήματα είναι αβαρή και μη εκτατά και αυτό που είναι τυλιγμένο στον κύλινδρο δεν ολισθαίνει μέσα στο αυλάκι. Δίνεται $\mathbf{g = 10 m/s^2}$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



1. Οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα κατά την οριζόντια διεύθυνση είναι:

Η εξωτερική δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon\xi}$ που μεταφέρεται στο ανώτερο σημείο A΄ του κυλίνδρου Σ_1 μέσω του τυλιγμένου νήματος και τείνει να τον μεταφέρει και να τον περιστρέψει κατά τη φορά του ρολογιού. Στη μεταφορά αντιτίθεται η τάση $\vec{\mathbf{F}}_1$ του τεντωμένου νήματος ZO και στην περιστροφή η στατική τριβή $\vec{\mathbf{T}}_1$.

Στο σώμα $Σ_2$ ασκείται η τάση $\vec{F}_2$ του νήματος ΖΟ και η στατική τριβή $\vec{T}_2$.

Οι δύο τάσεις που ασκεί το (αβαρές) νήμα ΖΟ έχουν ίσα μέτρα, $F_1 = F_2 = F$. Όσο λοιπόν ισορροπούν τα σώματα, έχουμε:

(Σώμα $Σ_1$): $\quad Στ_{(O)} = 0 \;\rightarrow\; (F_{εξ} - T_1)\cdot R = 0 \;\rightarrow\; \boxed{T_1 = F_{εξ}}$ *(1)*

$$ΣF_x = 0 \;\rightarrow\; F_{εξ} + T_1 - F_1 = 0 \;\rightarrow\; F = F_{εξ} + T_1 \;\rightarrow\; \boxed{F = 2\cdot F_{εξ}} \quad (2)$$

(Σώμα $Σ_2$): $\quad ΣF_x = 0 \;\rightarrow\; F_2 - T_2 = 0 \;\rightarrow\; T_2 = F \;\rightarrow\; \boxed{T_2 = 2\cdot F_{εξ}}$ *(3)*

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει για τα μέτρα των δύο τριβών: $\boxed{T_2 = 2\cdot T_1}$ *(4)*

Είναι δηλαδή ανάλογα με αυτό της $\vec{F}_{εξ}$ και επειδή πρόκειται για στατικές τριβές ισχύουν και οι περιορισμοί:

$$\boxed{T_1 < μ\cdot m_1\cdot g} \quad (5) \qquad \boxed{T_2 < μ\cdot m_2\cdot g} \quad (6)$$

α) Για να γλιστρήσει πρώτο το $Σ_2$ θα πρέπει πρώτα να φτάσει στο όριό του το μέτρο της στατικής τριβής $\vec{T}_2$, δηλαδή από (6):

$$T_2 = μ\cdot m_2\cdot g \xrightarrow{(4)} 2\cdot T_1 = μ\cdot m_2\cdot g \;\rightarrow\; T_1 = ½\cdot μ\cdot m_2\cdot g$$

και σε συνδυασμό με την (5):

$$½\cdot μ\cdot m_2\cdot g < μ\cdot m_1\cdot g \;\rightarrow\; \boxed{\frac{m_1}{m_2} > \frac{1}{2}} \;\text{ ή }\; \boxed{λ > \frac{1}{2}} \quad (7)$$

Δηλαδή για $\mathbf{m_2 = 4kg}$ θα πρέπει να είναι $\mathbf{m_1 > 2kg}$.

β) Για να γλιστρήσει τώρα πρώτο το $Σ_1$ θα πρέπει να φτάσει πρώτα στο όριό του το μέτρο της στατικής τριβής $\vec{T}_1$, δηλαδή από (5):

$$T_1 = μ\cdot m_1\cdot g \xrightarrow{(4)} T_2 = 2\cdot μ\cdot m_1\cdot g$$

και σε συνδυασμό με την (6), όπως είναι αναμενόμενο:

$$2\cdot μ\cdot m_1\cdot g < μ\cdot m_2\cdot g \;\rightarrow\; \boxed{\frac{m_1}{m_2} < \frac{1}{2}} \;\text{ ή }\; \boxed{λ < \frac{1}{2}} \quad (8)$$

Δηλαδή για $\mathbf{m_2 = 4kg}$ θα πρέπει να είναι τώρα $\mathbf{m_1 < 2kg}$.

2. Μας ενδιαφέρει τώρα να βρούμε το ελάχιστο μέτρο της $\vec{F}_{εξ}$ για το οποίο αρχίζει και στις δύο περιπτώσεις να ολισθαίνει το $Σ_2$. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει το μέτρο $\mathbf{F_2 = F}$ της τάσης του νήματος ΖΟ να ξεπεράσει αυτό της οριακής στατικής τριβής $\vec{T}_2$:

$$\boxed{F > \mu \cdot m_2 \cdot g} \quad \textit{(9)}$$

α) Στην περίπτωση αυτή ισχύει $\lambda > ½$ και το $Σ_2$ είναι αυτό που θα γλιστρήσει πρώτο, μόλις ικανοποιηθεί η συνθήκη (9):

$$\mathbf{F > \mu \cdot m_2 \cdot g} \xrightarrow{(2)} \mathbf{2 \cdot F_{εξ} > \mu \cdot m_2 \cdot g} \rightarrow \mathbf{F_{εξ} > 4N} \text{ και οριακά } \boxed{\mathbf{F_{εξ,\,min} = 4N}}$$

β) Η δεύτερη περίπτωση είναι πιο σύνθετη, διότι πριν αρχίσει να γλιστράει το $Σ_2$ έχει ήδη αρχίσει η ολίσθηση του $Σ_1$ και δεν ισχύει πλέον η σχέση (2) που είχε προκύψει από την ακινησία και των δύο σωμάτων.

Συγκεκριμένα, καθώς μεγαλώνει το μέτρο της $\vec{F}_{εξ}$ φτάνει τώρα πρώτα το μέτρο της στατικής τριβής $\vec{T}_1$ στο όριο $\mathbf{T_1 = \mu \cdot m_1 \cdot g}$ και στη συνέχεια μένει σταθερή ως τριβή ολίσθησης, ενώ ο κύλινδρος αρχίζει να επιταχύνεται στροφικά χωρίς να μεταφέρεται, αφού τον συγκρατεί μέσω του νήματος το ακίνητο ακόμα σώμα $Σ_2$ («σπινάρει» σε στάση).

Έτσι η σχέση των μέτρων των δυνάμεων για το $Σ_1$ κατά την οριζόντια διεύθυνση γίνεται:

$$\mathbf{\Sigma F_x = 0} \rightarrow \mathbf{F_{εξ} + T_1 - F_1 = 0} \rightarrow \boxed{\mathbf{F = F_{εξ} + \mu \cdot m_1 \cdot g}} \quad \textit{(2α)}$$

όπου η μάζα $\mathbf{m_1}$ είναι $\mathbf{m_1 = \lambda \cdot m_2}$ με $\mathbf{\lambda < ½}$

και τελικά το $Σ_2$ θα αρχίσει να γλιστράει κι αυτό μόλις ικανοποιηθεί η συνθήκη (9) που με τη βοήθεια της (2α) τώρα γίνεται:

$$\mathbf{F > \mu \cdot m_2 \cdot g} \rightarrow \mathbf{F_{εξ} + \mu \cdot m_1 \cdot g > \mu \cdot m_2 \cdot g} \rightarrow \mathbf{F_{εξ} > \mu \cdot (m_2 - m_1) \cdot g} \text{ ή αλλιώς}$$

$$\mathbf{F_{εξ} > (1 - \lambda) \cdot \mu \cdot m_2 \cdot g} \text{ και οριακά } \boxed{\mathbf{F_{εξ,\,min} = (1 - \lambda) \cdot 8N}} \,,\; \boxed{\mathbf{\lambda < ½}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μητρόπουλος