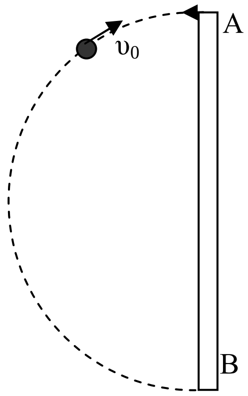
Πλαστική κρούση υλικού σημείου με ελεύθερη ράβδο



Στο διπλανό σχήμα εικονίζεται μια λεπτή ομογενής ράβδος AB μήκους ℓ=2m και μάζας M=1Kg, οποία ηρεμεί σε λείο οριζόντιο τραπέζι.

Στο άκρο A τις ράβδου υπάρχει μια μικρή ακίδα κάθετη στην ράβδο.

Πάνω στο τραπέζι είναι χαραγμένο ένα ημικυκλικό αυλάκι με διάμετρο την AB.

Μια μικρή σφαίρα μάζας m=0,25Kg αμελητέας ακτίνας κινείται χωρίς να περιστρέφεται με ταχύτητα υ_0=8m/s και «καρφώνεται» στην ακίδα της ράβδου.

Να υπολογιστούν:

1) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου.
2) Η ταχύτητα του μέσου M της ράβδου αμέσως μετά την κρούση
3) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μεταβιβάστηκε στην ράβδο.
4) Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μετατράπηκε σε θερμική.

Δίνεται ο ροπή αδράνειας λεπτής ομογενούς ράβδου μάζας M και μήκους ℓ ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της και είναι κάθετος σ' αυτήν $I=\frac{1}{12}M\ell^2$.

Απάντηση:

1,2)Έστω υ_{cm} και υ_A οι ταχύτητες του μέσου της ράβδου και του άκρου A της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

Επειδή μετά την κρούση η ράβδος εκτελεί σύνθετη κίνηση, η ταχύτητα του σημείου A θα είναι το διανυσματικό άθροισμα των ταχυτήτων που θα είχε αν η ράβδος εκτελούσε κάθε κίνηση χωριστά.

Επομένως $\upsilon_A=\upsilon_{cm}+\omega d$ όπου $d=\frac{\ell}{2}$.

Επειδή στο σύστημα ράβδος - σφαίρα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις, η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή. Επομένως,

$$p_{\pi\rho\iota\nu}=p_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\Rightarrow m\upsilon_0=M\upsilon_{cm}+m\upsilon_A\Rightarrow m\upsilon_0=M\upsilon_{cm}+m(\upsilon_{cm}+\omega d)\quad(1)$$

Επειδή στο σύστημα ράβδος - σφαίρα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές η στροφορμή του συστήματος ως προς το μέσον M της ράβδου παραμένει σταθερή. Επομένως,

$$L_{(M)\pi\rho\iota\nu}=L_{(M)\mu\varepsilon\tau\alpha}\Rightarrow m\upsilon_0 d=I\omega+m\upsilon_A d\Rightarrow m\upsilon_0 d=I\omega+m(\upsilon_{cm}+\omega d)d\quad(2)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε ότι

$$\omega=\frac{mM\upsilon_0 d}{(M+m)I+Mmd^2}$$

Αντικαθιστώντας $I=\frac{1}{12}M\ell^2=\frac{1}{3}Md^2$ έχουμε τελικά ότι:

$$\omega=\frac{mM\upsilon_0 d}{(M+m)I+Mmd^2}=\frac{3m\upsilon_0}{(M+4m)d}=3rad/s$$

$$\upsilon_{cm} = \frac{m(\upsilon_0 - \omega d)}{M+m} = 1m/s$$

3,4) Η αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας είναι $K_{\sigma\varphi(\alpha\rho\chi)} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = 8J$.

Η κινητική ενέργεια της ράβδου αμέσως μετά την κρούση είναι

$$K_{\rho\alpha\beta\delta} = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{6}Md^2\omega^2 = 2J.$$

Συνεπώς, το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μεταβιβάστηκε στην ράβδο είναι:

$$\frac{2}{8} = 0,25 = 25\%.$$

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση είναι $K_{\sigma\varphi(\tau\varepsilon\lambda)} = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 = \frac{1}{2}m(\upsilon_{cm} + \omega d)^2 = 2J$.

Η ενέργεια ου μετατράπηκε σε θερμική είναι ίση με την μείωση της κινητικής ενέργειας του συστήματος

$$Q = 8 - 2 - 2 = 4J$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μετατράπηκε σε θερμική είναι:

$$\frac{4}{8} = 0,5 = 50\%.$$

Παρατηρήσεις

1) Μετά την κρούση, η σφαίρα και η ράβδος αποτελούν ένα ενιαίο στερεό σώμα.

Η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο που διέρχεται από το μέσον της είναι:

$$I_{\sigma\tau\varepsilon\rho} = I_{\rho\alpha\beta\delta} + md^2 = \frac{1}{3}Md^2 + md^2 = \frac{1,75}{3}Kgm^2.$$

Η ποσότητα $\frac{1}{2}I_{\sigma\tau\varepsilon\rho}\omega^2$ δεν είναι η κινητική ενέργεια του στερεού.

Ομοίως η ποσότητα $I_{\sigma\tau\varepsilon\rho}\omega$ δεν είναι η στροφορμή του στερεού ως προς άξονα που διέρχεται από το μέσον της ράβδου.

Ο λόγος που συμβαίνει αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μέσο της ράβδου δεν είναι το κέντρο μάζας του στερεού αυτού.

2) Μια εναλλακτική λύση του προβλήματος θα ήταν η εξής:

Βρίσκουμε το κέντρο μάζας G του συστήματος ράβδος – σφαίρα και εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης στροφορμής ως προς το G.

Επιμέλεια

Ε. Κορφιάτης