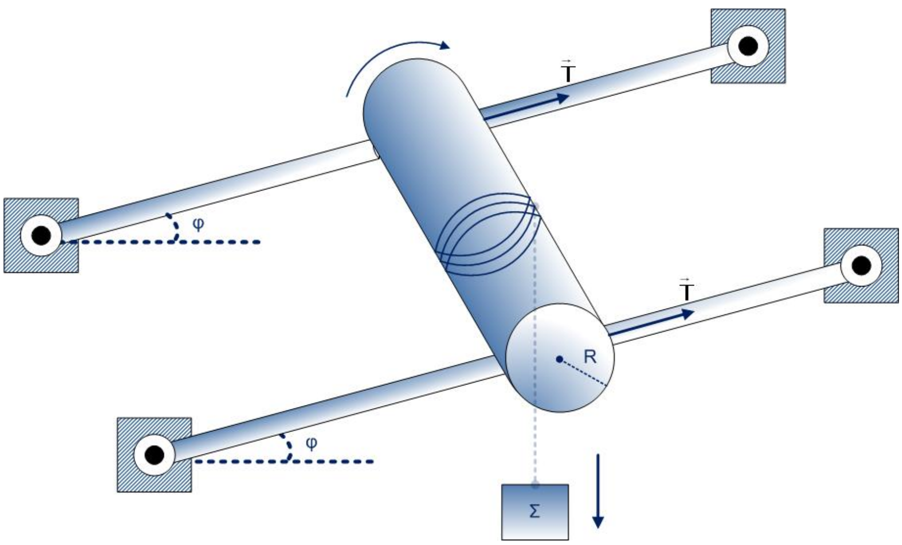
Ομογενής Κύλινδρος με Δεμένο Σχοινί
Κίνηση σε Κεκλιμένο Επίπεδο

Ομογενής κύλινδρος μάζας m και ακτίνας R εφάπτεται επί κεκλιμένων δοκών και είναι τυλιγμένος με α-βαρές μη εκτατό σχοινί μεγάλου μήκους, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού έχει δεθεί σώμα (Σ) μάζας M=2m.

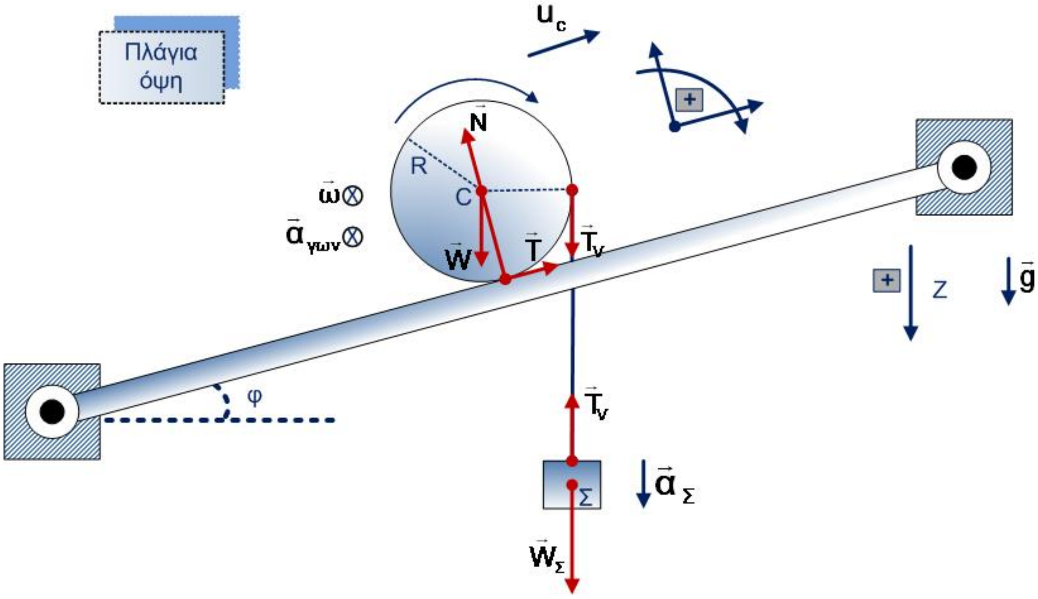


Το σύστημα αρχικά ισορροπεί και το σχοινί είναι τεντωμένο. Την χρονική στιγμή t=0 ελευθερώνουμε το σύστημα και ο κύλινδρος αρχίζει να κυλάει προς τα επάνω, χωρίς να ολισθαίνει. Θεωρώντας ότι το σχοινί παραμένει συνεχώς κατακόρυφο, να υπολογιστούν:

1. η γωνιακή επιτάχυνση & η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, καθώς και η επιτάχυνση του σώματος (Σ).
2. η τάσης του νήματος
3. η στατική τριβή
4. η ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μ, ώστε ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνεται: $I_C = \frac{1}{2}mR^2, \varphi = \pi/6$

Απάντηση:



Ερώτημα 1:

- **Κύλινδρος**

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο κύλινδρο είναι οι εξής: το βάρος του **W,** οι κάθετες αντιδράσεις **N** από τις δοκούς, η τάση του σχοινιού $\mathbf{T_\nu}$ και οι τριβές **T,** οι οποίες έχουν φορά προς τα εμπρός (δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εξαρχής τη φορά τους).

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_X = m \cdot \alpha_c \Rightarrow 2T - mg\eta\mu\varphi - T_\nu \eta\mu\varphi = m \cdot \alpha_c \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{2T - (mg + T_\nu) \cdot \eta\mu\varphi = m \cdot \alpha_c} \ (1) \\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2N - mg\sigma\upsilon\nu\varphi - T_\nu \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{N = \frac{1}{2}(mg + T_\nu) \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} \ (2) \end{cases}$$

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau} = I_C \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2N \cdot 0 + W \cdot 0 + T_\nu \cdot R - 2T \cdot R = I_C \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T_\nu - 2T) \cdot R = \frac{1}{2} mR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_\nu - 2T = \frac{1}{2} mR \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{2T = T_\nu - \frac{mR}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.}} \ (3)$$

Επιπλέον ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Άρα:

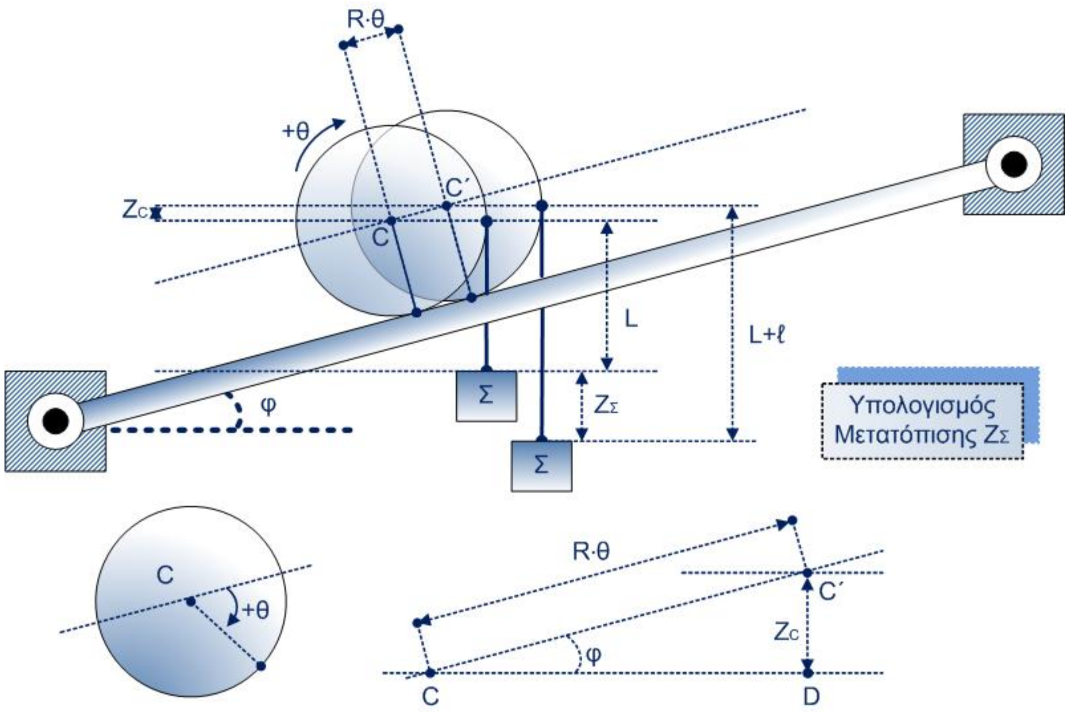
$$\mathbf{\alpha_c = \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot R} \ (4)$$

- **Σώμα (Σ)**

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα (Σ) οι εξής: το βάρος του $\mathbf{W_\Sigma}$ και η τάση του σχοινιού $\mathbf{T_\nu}$**.** Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\Sigma F_Z = M \cdot \alpha_\Sigma \Rightarrow Mg - T_\nu = M \cdot \alpha_\Sigma \xRightarrow{M=2m} \mathbf{T_\nu = 2mg - 2m \cdot \alpha_\Sigma} \ (5)$$

- **Εύρεση σχέσης μεταξύ των επιταχύνσεων α_Σ & $\alpha_{γων.}$**



Αν σε χρόνο t το σχοινί ξετυλίγεται κατά ℓ=R·θ και ο άξονας του κυλίνδρου ανεβαίνει κατά Z_C, τότε το σώμα (Σ) κατεβαίνει κατά:

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_\Sigma = \ell - Z_C \\ \ell = R\theta \\ Z_C = R\theta \cdot ημφ \end{cases} \Rightarrow Z_\Sigma = R\theta - R\theta \cdot ημφ \Rightarrow \mathbf{Z_\Sigma = R\theta \cdot (1 - ημφ)} \ (6)$$

Επιπλέον

$$(6) \Rightarrow \frac{dZ_\Sigma}{dt} = \frac{d[R\theta \cdot (1-ημφ)]}{dt} \Rightarrow u_\Sigma = R \cdot (1-ημφ) \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_\Sigma = \omega R \cdot (1-ημφ) \Rightarrow \frac{du_\Sigma}{dt} = \frac{d[\omega R(1-ημφ)]}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_\Sigma = R(1-ημφ) \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \mathbf{\alpha_\Sigma = R \cdot (1-ημφ) \cdot \alpha_{γων.}} \ (7)$$

- **Υπολογισμός γωνιακής επιτάχυνσης**

$$\text{από } (1) \Rightarrow 2T - (mg + T_\nu) \cdot ημφ = m \cdot \alpha_c \xRightarrow{(3),(4)}$$

$$\Rightarrow T_\nu - \frac{mR}{2} \cdot \alpha_{γων.} - (mg + T_\nu) \cdot ημφ = mR \cdot \alpha_{γων.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_\nu - T_\nu \cdot ημφ - mg \cdot ημφ = \frac{3}{2} mR \cdot \alpha_{γων.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_\nu \cdot (1-\eta\mu\varphi) - mg\cdot\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.} \overset{(5)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow (2mg - 2m\cdot\alpha_\Sigma)\cdot(1-\eta\mu\varphi) - mg\cdot\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.} \overset{(7)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2m\cdot\left[g - R\cdot(1-\eta\mu\varphi)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.}\right]\cdot(1-\eta\mu\varphi) - mg\cdot\eta\mu\varphi = \frac{3}{2}mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{2mg\cdot(1-\eta\mu\varphi) - mg\cdot\eta\mu\varphi}{2mR\cdot(1-\eta\mu\varphi)^2 + \frac{3}{2}mR} \xRightarrow{\eta\mu\varphi=\eta\mu(\pi/6)=\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{(mg)/2}{(4mR)/2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu.} = \frac{g}{4R}}}$$

- **Υπολογισμός επιτάχυνσης του κέντρου μάζας**

$$\text{από } (4) \Rightarrow \alpha_c = \alpha_{\gamma\omega\nu.}\cdot R \Rightarrow \alpha_c = \frac{g}{4R}\cdot R \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha_c = \frac{g}{4}}}$$

- **Υπολογισμός επιτάχυνσης του σώματος (Σ)**

$$\text{από } (7) \Rightarrow \alpha_\Sigma = R\cdot(1-\eta\mu\varphi)\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow \alpha_\Sigma = R\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{g}{4R} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\alpha_\Sigma = \frac{g}{8}}}$$

Ερώτημα 2:

- **Υπολογισμός της τάσης του νήματος**

$$\text{από } (5) \Rightarrow T_\nu = 2mg - 2m\cdot\alpha_\Sigma \Rightarrow T_\nu = 2mg - 2m\cdot\frac{g}{8} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T_\nu = \frac{7mg}{4}}}$$

Ερώτημα 3:

- **Υπολογισμός της στατικής τριβής**

$$\text{από } (3) \Rightarrow 2T = T_\nu - \frac{mR}{2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow 2T = \frac{7mg}{4} - \frac{mR}{2}\cdot\frac{g}{4R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2T = \frac{13mg}{8} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{T = \frac{13mg}{16}} > 0}$$

Η τριβή **T** είναι θετική. ⇒ άρα έχει φορά προς τα εμπρός.

Ερώτημα 4:

Ο κύλινδρος για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, πρέπει να ισχύει:

$$T \le T_{\sigma(max)} \Rightarrow T \le \mu\cdot N \overset{(2)}{\Rightarrow} T \le \mu\cdot\frac{1}{2}(mg + T_\nu)\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{13mg}{16} \leq \frac{\mu}{2} \cdot \left(mg + \frac{7mg}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mu \geq \frac{13\sqrt{3}}{33} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\mu_{(min)} = \frac{13\sqrt{3}}{33}}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης

Τσόμπος Κωστής