Μια ράβδος και δυο δακτύλιοι

Με αφορμή ένα πρόβλημα του βιβλίου κατεύθυνσης της Γ’ Λυκείου

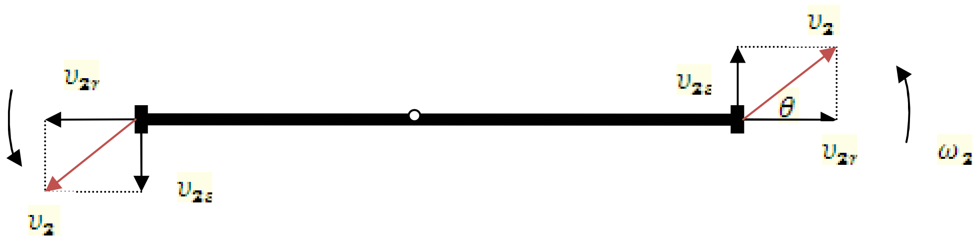
Μία ομογενής ράβδος μάζας Μ και μήκους L=4m βρίσκεται στο διάστημα μακριά από βαρυτικές επιδράσεις εκτελώντας επίπεδη στροφική κίνηση γύρω από το κέντρο της. Δυο δακτύλιοι αμελητέου πάχους και μάζας m=M/12 ο κάθε ένας είναι περασμένοι εφαρμοστά στην ράβδο και συγκρατούνται με αβαρές νήμα κοντά στο κέντρο της και σε ίσες αποστάσεις από αυτό. Μεταξύ ράβδου και δακτυλίων δεν υπάρχουν τριβές. Κάποια στιγμή το νήμα σπάει και επειδή δεν υπάρχει η απαιτούμενη κεντρομόλος δύναμη οι δακτύλιοι κινούνται προς τα άκρα της ράβδου. Όταν οι δακτύλιοι απέχουν από το κέντρο κατά x=1m η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι ω_1=2rad/s.

i) Βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω_2 της ράβδου τη στιγμή που οι δακτύλιοι φτάνουν στα άκρα της.
ii) Με δεδομένο ότι τη στιγμή που οι δακτύλιοι απέχουν από το κέντρο της ράβδου κατά x=1m η συνιστώσα της ταχύτητας του κάθε ενός πάνω στη ράβδο είναι $\upsilon_1=\sqrt{7}m/s$ υπολογίστε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}_2$ του κάθε δακτυλίου τη στιγμή που αυτοί θα φτάνουν στα άκρα της ράβδου.
iii) Υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν πλέον οι δακτύλιοι την έχουν εγκαταλείψει .

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο της είναι: $I=\frac{1}{12}ML^2$.

Λύση:

i) Το σύστημα ράβδου – δακτυλίων είναι μονωμένο, οπότε η αρχή διατήρησης της στροφορμής μας δίνει:



$$L_2=L_1 \Longrightarrow \left(\frac{ML^2}{12}+2m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\omega_2=\left(\frac{ML^2}{12}+2m\left(\frac{L}{4}\right)^2\right)\omega_1 \Longrightarrow ..\omega_2=\frac{3}{4}\omega_1$$

$$\omega_2=\frac{3}{2}rad/s$$

ii) Επειδή δεν υπάρχουν τριβές και η δυναμική ενέργεια παραμένει σταθερή, η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη και το παραπάνω σχήμα, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} K_2 = K_1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{12} + 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2\right){\omega_2}^2 + \frac{1}{2}2mv_{2r}^2 \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{12} + 2m\left(\frac{L}{4}\right)^2\right){\omega_1}^2 + \frac{1}{2}2mv_{1r}^2 \Rightarrow \cdots \end{aligned}\right\} \quad \upsilon_{2r} = 4m/s$$

Από τη στροφική κίνηση έχουμε:

$$\upsilon_{2\varepsilon} = \omega_2 \frac{L}{2} \Rightarrow$$

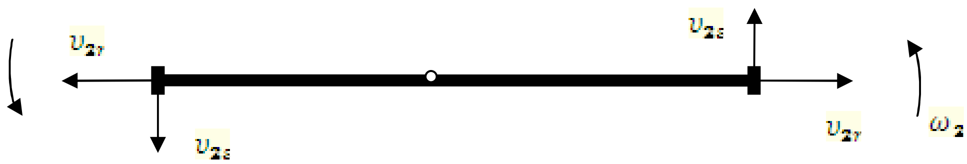
$$\upsilon_{2\varepsilon}=3m/s$$

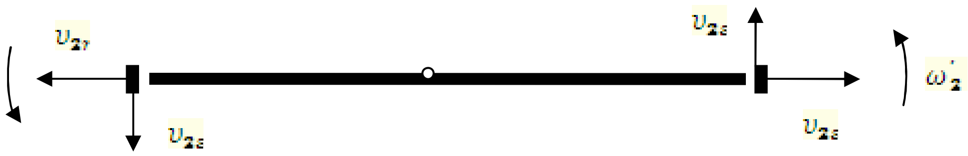
και σε πολικές συντεταγμένες:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_{2r}^2 + \upsilon_{2\varepsilon}^2}\,, \qquad \upsilon_2 = 5\,m/s$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\upsilon_{2\varepsilon}}{\upsilon_{2r}} = \frac{3}{4}$$

iii) Επειδή οι ωθήσεις των δυνάμεων που δέχονται οι δακτύλιοι από τη στιγμή που βρίσκονται στα ακρότατα σημεία μέχρι τη στιγμή που εγκαταλείπουν τη ράβδο είναι μηδενικές οριακά (η χρονική διάρκεια δράσης των δυνάμεων αυτών τείνει στο μηδέν), οι ορμές των δακτυλίων δεν θα αλλάζουν όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.





Οπότε επειδή το σύστημα παραμένει μονωμένο

$$L_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = L_{\pi\rho\iota\nu} \Rightarrow \frac{ML^2}{12}\omega_2' + 2m\frac{L}{2}\upsilon_{2\varepsilon} = \frac{ML^2}{12}\omega_2 + 2m\frac{L}{2}\upsilon_{2\varepsilon} \Rightarrow$$

$$\omega_2' = \omega_2 = \frac{3}{2}rad/s$$

<u>*Σημείωση*</u>

*Αν υπήρχαν τριβές το μόνο που θα άλλαζε θα ήταν η απάντηση στο **β.** ερώτημα. Βέβαια στην περίπτωση τριβών για να απαντηθεί το **β.** ερώτημα θα χρειαζόταν πρόσθετα δεδομένα.*

Επιμέλεια

Εμμανουήλ Λαμπράκης