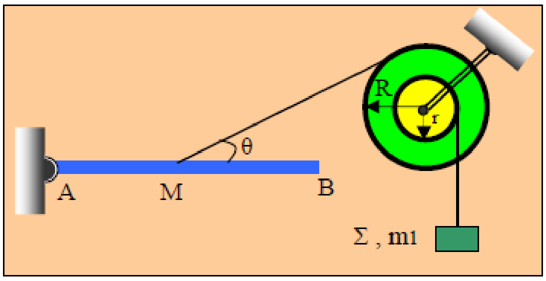
Μια κοινή ισορροπία δυο χωριστές περιστροφές

Στη διάταξη του σχήματος, η διπλή τροχαλία αποτελείται από δυο ομόκεντρους δίσκους, που είναι κολλημένοι μεταξύ τους. Ο μικρός δίσκος έχει ακτίνα r και είναι αβαρής, ενώ ο μεγάλος δίσκος, έχει μάζα m και ακτίνα R = 2r. Το ελεύθερο άκρο του νήματος που είναι τυλιγμένο στον μεγάλο δίσκο, είναι δεμένο στο μέσον Μ της ράβδου ΑΒ.



Η ράβδος ΑΒ, έχει μάζα m΄= m μήκος ℓ = 2R, και είναι αρθρωμένη σε κατακόρυφο τοίχο. Ένα σώμα μάζας m_1 , κρέμεται στο ελεύθερο άκρο του νήματος που είναι τυλιγμένο στον μικρό δίσκο. Το σύστημα ισορροπεί σε ηρεμία, η ράβδος είναι οριζόντια, και η γωνία θ = 30º .

i) Να υπολογίσετε την τιμή του λόγου m_1/m_2 .

ii) Κόβουμε το νήμα που συνδέει τη ράβδο με την τροχαλία.

Να υπολογίσετε τη ταχύτητα του σώματος Σ όταν θα έχει μετατοπιστεί κατά h = r από την αρχική του θέση, αν η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου για ίση κατακόρυφη μετατόπιση του κέντρου μάζας της από την αρχική οριζόντια θέση, έχει μέτρο ω = 5 rad/ s.

Το νήμα είναι αβαρές σταθερού μήκους, δεν γλιστρά στην τροχαλία, τριβές δεν υπάρχουν και g = 10m/s².

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της $I_A = m΄ \ell^2/3$, και ροπή αδράνειας τροχαλίας μάζας m και ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό της και διερχόμενο από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = ½ mR^2$.

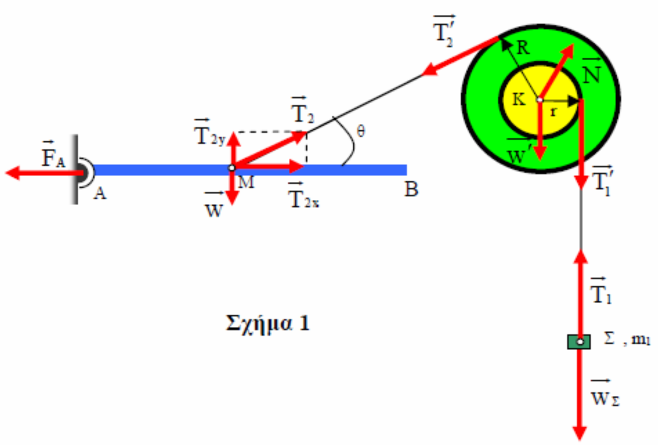
Απάντηση

i) Από την ισορροπία της ράβδου - σχήμα 1 - έχουμε :

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή τελικά } T_{2y}\frac{\ell}{2} = w\frac{\ell}{2} \text{ ή}$$

$$T_2 ημθ = m'g \text{ ή } T_2 ημ30^o = mg \text{ ή}$$

$$T_2 = 2mg \ (1)$$



Σχήμα 1

Από την ισορροπία της τροχαλίας - σχήμα 1- έχουμε

$$\Sigma\tau_{(K)} = 0 \text{ ή } T_2'R = T_1'r \text{ ή}$$

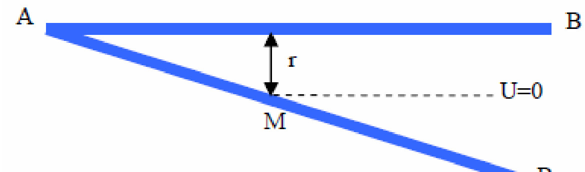
$$T_2'2r = T_1'r \text{ ή } T_1' = 2T_2' \ (2)$$

Αλλά από την ισορροπία των νημάτων είναι $T_1 = T_1'$ και $T_2 = T_2'$ (3) ενώ από την ισορροπία του σώματος Σ έχουμε - σχήμα 1 - ότι $\vec{T}_1 + \vec{w}_\Sigma = \vec{0}$ ή $T_1 = m_1 g$ (4)

Από τις (1) , (2), (3), και (4) προκύπτει ότι $m_1 g = 4mg$ ή

$$\frac{m}{m_1}=\frac{1}{4}\quad(5)$$

ii) Εφαρμόζουμε αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κίνηση της ράβδου - σχήμα 2- κι έχουμε ότι



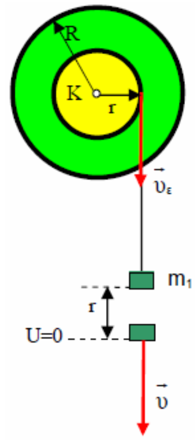
Σχήμα 2

$$mgr=\frac{1}{2}I_{(A)}\omega^2 \quad ή$$

$$mgr=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}m\ell^2\omega^2 \quad ή$$

$$6gr=\left(4r\right)^2\omega^2 \;\; ή \;\; r=\frac{6g}{16\omega^2}=0{,}15\text{m}\;(6)$$

Εξ’ άλλου, με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ενέργειας για το σύστημα τροχαλία σώμα Σ - σχήμα 3 - έχουμε ότι



Σχήμα 3

$$m_1gr=\frac{1}{2}m_1\upsilon^2+\frac{1}{2}I_{(K)}\omega^2 \quad ή$$

$$m_1gr=\frac{1}{2}m_1\upsilon^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2 \;\text{, και με βάση την (5)}$$

$$4mgr=\frac{1}{2}\cdot 4m\upsilon^2+\frac{1}{4}m\left(2r\right)^2\omega^2 \quad ή$$

$$4gr=2\upsilon^2+r^2\omega^2\,.$$

Όμως, το νήμα δεν γλιστρά άρα $\upsilon=\upsilon_\varepsilon=\omega r$ οπότε

$$4gr=2\upsilon^2+\upsilon^2 \quad ή$$

$$4gr=3\upsilon^2 \quad ή$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{4gr}{3}} \;\text{ και με βάση την (6)}$$

$$\upsilon=\sqrt{2}\,\frac{m}{s}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης