ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ – 3 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΚΑΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

1η ΕΡΩΤΗΣΗ

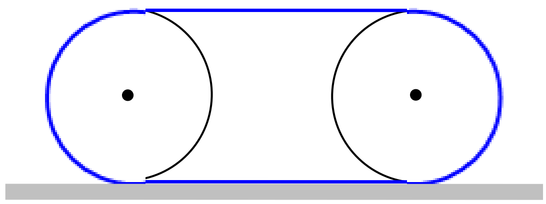
Ένας αμελής μαθητής της Δ΄ Γυμνασίου του πρακτικού τμήματος στη δεκαετία του '70 δεν έχει ως συνήθως γεωμετρικά όργανα και στο αιφνίδιο διαγώνισμα Γεωμετρίας χρειάζεται να σχεδιάσει κύκλους διαφορετικών ακτίνων. Για καλή του τύχη στα κέρματα που έχει μαζί του υπάρχουν και δύο δεκάρες (για τους νεώτερους: 1 δεκάρα $=\frac{1}{10}$ της δραχμής). Κρατάει ακίνητη τη μία δεκάρα κέντρου K_1 και θέτει τη μύτη του στυλό στη μικρή οπή που έχει στο κέντρο του το άλλο μικρής αξίας –αλλά πολύτιμο για την περίσταση- νόμισμα,η δεκάρα κέντρου K_2 .

Μετατοπίζει με τη βοήθεια του στυλό τη δεκάρα κέντρου K_2 έτσι ώστε αυτή να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρεια της πρώτης ακίνητης δεκάρας κέντρου K_1.Θεωρούμε ότι η μύτη του στυλό διαγράφει την περιφέρεια κύκλου που αντιστοιχεί στις διαδοχικές θέσεις του κέντρου K_2 της κινούμενης δεκάρας. Όταν η κινούμενη δεκάρα θα έχει εκτελέσει N_1 περιστροφές γύρω από το κέντρο K_1 της ακίνητης δεκάρας, οι περιστροφές N_2 που θα έχει εκτελέσει γύρω από το κέντρο της K_2 θα είναι:

Α1. **α.** $N_2 = N_1$ **β.** $N_2 = 2N_1$ γ. $N_2 = \frac{1}{2}N_1$

Α2.Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2η ΕΡΩΤΗΣΗ

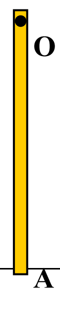


Δύο όμοιοι τροχοί ακτίνας R έχουν τυλιγμένο στην περιφέρειά τους ομογενή και ισοπαχή ιμάντα μικρού πάχους μάζας m. Το σύστημα τροχοί – ιμάντας βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Οι τροχοί κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν με ταχύτητα μέτρου υ. Αν η ροπή αδρανείας σώματος μάζας m που έχει τη μορφή περιφέρειας κύκλου μικρού πάχους ακτίνας R ως προς άξονα κάθετο προς αυτό που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου είναι $I=mR^2$, η κινητική ενέργεια του ιμάντα είναι :

Β1. **α.** $K=\frac{1}{2}m\upsilon^2$ **β.** $K=2m\upsilon^2$ **γ.** $K=m\upsilon^2$

Β2.Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

3η ΕΡΩΤΗΣΗ



Ομογενής ράβδος ΟΑ μάζας m και μήκους ℓ μπορεί να στρέφεται περί το σταθερό άκρο της Ο. Αρχικά η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση. Η ράβδος στρέφεται και φθάνει στην οριζόντια θέση. Για τη μετατόπιση αυτή το έργο W_{τ_W} της ροπής της δύναμης του βάρους είναι:

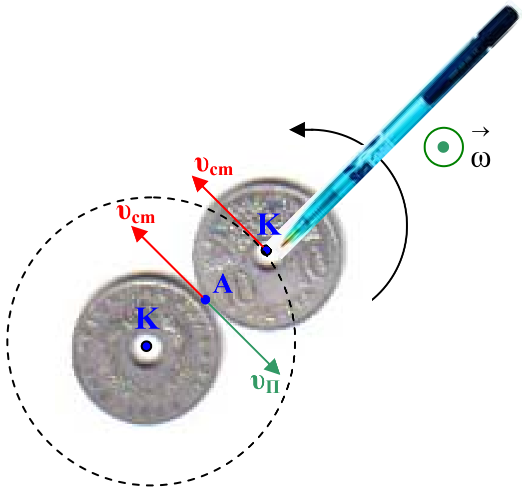
Γ1. α. $W_{\tau_W} = -\,mg\,\dfrac{1}{2}$ **β.** $W_{\tau_W} = -\,mg\,\ell$ γ. $W_{\tau_W} = 0$

Γ2.Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α1 . β

Α2 .Η δεκάρα κέντρου K_2 κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στην περιφέρεια της δεκάρας κέντρου K_1 ,άρα για τα μέτρα των ταχυτήτων ισχύει $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\Pi}$ (1) όπου υ_{cm} = το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας της κυλιόμενης δεκάρας και υ_{Π} = το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας της κυλιόμενης δεκάρας λόγω της στροφικής της κίνησης. Από την (1):

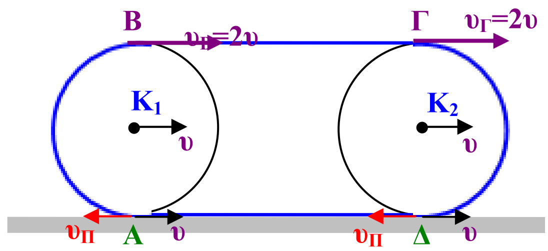


$\dfrac{\widehat{s}_{\mu}}{t} = \dfrac{\widehat{s}_{\pi}}{t}$ όπου $\widehat{s}_{\mu}$ = το τόξο που διανύει το κέντρο K_2 λόγω της μεταφορικής του κίνησης – η οποία είναι κυκλική ακτίνας 2R- σε χρόνο t

και $\widehat{s}_{\pi}$ = το τόξο που διανύει το εκάστοτε σημείο επαφής Α της κυλιόμενης δεκάρας με την ακίνητη στον ίδιο χρόνο t.Άρα $\widehat{s}_{\mu} = \widehat{s}_{\pi}$ (2). Από (2)$\Rightarrow N_1 2\pi 2R = N_2 2\pi R \Rightarrow$ $N_2 = 2N_1$.

Β1. γ

Β2. Επειδή οι τροχοί κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν με ταχύτητα μέτρου υ, η γραμμική ταχύτητα των σημείων των περιφερειών τους λόγω της στροφικής τους κίνησης υ_{Π} έχει το ίδιο μέτρο με την ταχύτητα υ των κέντρων μάζας τους δηλαδή $\upsilon_{\Pi} = \upsilon$. Για τα σημεία τους Α και Δ ισχύει $\upsilon_A = \upsilon_\Delta = 0$ (1).Αντίστοιχα για τα ανώτερα σημεία τους Β και Γ ισχύει $\upsilon_B = \upsilon_\Gamma = 2\upsilon$(2).



Επειδή ο ιμάντας είναι ομογενής λόγω συμμετρίας ισχύει ότι $m_{AB} = m_{\Gamma\Delta}$ (1) και $m_{B\Gamma} = m_{\Delta A}$ (2) όπου: m_{AB},$m_{B\Gamma}$,$m_{\Gamma\Delta}$ και $m_{\Delta A}$ αντίστοιχα οι μάζες των τμημάτων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ του ιμάντα.

Το τμήμα ΑΒ του ιμάντα εκτελεί μεταφορική και στροφική κίνηση και έχει κινητική ενέργεια :

$K_{AB} = \dfrac{1}{2} m_{AB}\upsilon^2 + \dfrac{1}{2} I_{AB}\,\omega^2 \Rightarrow K_{AB} = \dfrac{1}{2} m_{AB}\upsilon^2 + \dfrac{1}{2} m_{AB}R^2\,\omega^2 \Rightarrow K_{AB} = m_{AB}\upsilon^2$ (3) διότι για το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων υ_π του ιμάντα που λόγω της επαφής τους με τους τροχούς συμμετέχουν στην περιστροφική κίνηση των τροχών , ισχύει $\upsilon_\pi = \omega R = \upsilon$.

Αντίστοιχα λόγω συμμετρίας το τμήμα ΔΑ έχει κινητική ενέργεια $K_{\Gamma\Delta} = m_{\Gamma\Delta}\upsilon^2$ (4)

Το τμήμα ΔΑ είναι ακίνητο λόγω της (1),άρα $K_{\Delta A} = 0$ (5)

Το τμήμα ΒΓ εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση και έχει κινητική ενέργεια

$$K_{ΒΓ} = \frac{1}{2}\ m_{ΒΓ}(2υ)^2 \Rightarrow K_{ΒΓ} = 2m_{ΒΓ}\,υ^2\ (6)$$

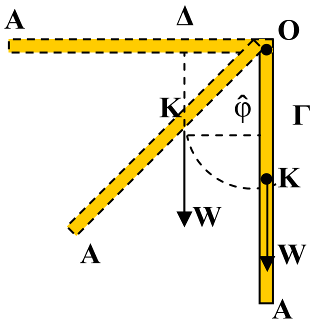
Η ολική κινητική ενέργεια του ιμάντα είναι $K = K_{ΑΒ} + K_{ΒΓ} + K_{ΓΔ} + K_{ΔΑ} \overset{(3),(4)}{\underset{(5),(6)}{\Longrightarrow}}$

$K = (m_{ΑΒ} + 2m_{ΒΓ} + m_{ΓΔ} + 0)υ^2 \overset{(2)}{\Longrightarrow} K = (\ m_{ΑΒ} + m_{ΒΓ} + m_{ΓΔ} + m_{ΔΑ}\ )\ υ^2 \Rightarrow K = m\,υ^2.$

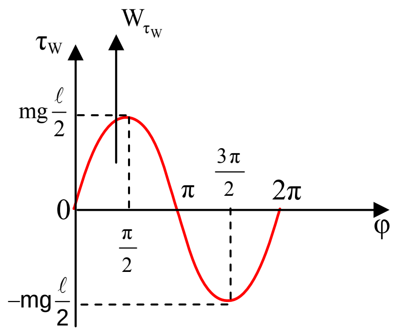
$Γ_1$. α

$Γ_2$.

1ος Τρόπος



Το μέτρο της ροπής του βάρους $τ_W$ σε τυχαία θέση που η ράβδος έχει στραφεί κατά γωνία $\hat{φ}$ σε σχέση με την αρχική της κατακόρυφη διεύθυνση, είναι $τ_W = mg(ΟΔ) \Rightarrow τ_W = mg(ΚΓ) \Rightarrow τ_W = mg\frac{\ell}{2}ημ\hat{φ}$, δηλαδή πρόκειται για ροπή μεταβλητού μέτρου (ημιτονοειδούς μορφής).Το έργο κατ' απόλυτο τιμή της ροπής του βάρους υπολογίζεται ως το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της ημιτονοειδούς καμπύλης και του άξονα <<των φ>> με υπολογισμό του αντίστοιχου ορισμένου ολοκληρώματος:



$$W_{τ_W} = \int_0^{\frac{π}{2}} mg\frac{l}{2}ημ\hat{φ} \Rightarrow W_{τ_W} = mg\frac{l}{2}\int_0^{\frac{π}{2}} ημ\hat{φ} \Rightarrow W_{τ_W} = mg\frac{l}{2}\left[συν\hat{φ}\right]_0^{\frac{π}{2}}$$

$$\Rightarrow W_{τ_W} = -\,mg\frac{l}{2}$$

Η φυσική σημασία του (-) είναι ότι το έργο της ροπής του βάρους είναι καταναλισκόμενο διότι η δύναμη βάρους αντιτίθεται στην περιστροφή της ράβδου.

2ος Τρόπος

Το έργο της ροπής του βάρους $W_{τ_W}$ κατά τη στροφική κίνηση της ράβδου είναι το έργο της δύναμης του βάρους W_W. Η δύναμη του βάρους W είναι δύναμη σταθερής κατεύθυνσης και μέτρου και μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της σε καμπύλη τροχιά. Αποδεικνύεται ότι το μέτρο του έργου μίας δύναμης με αυτά τα χαρακτηριστικά ισούται: **με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης και της προβολής της καμπύλης τρο-**

χιάς πάνω στη διεύθυνση του φορέα της δύναμης. Το πρόσημο της αριθμητικής τιμής του έργου είναι αντίστοιχα **θετικό** ή **αρνητικό** όταν η δύναμη **έχει τη φορά της κίνησης του σώματος στο οποίο ασκείται η δύναμη ή αντίτιθεται σ' αυτήν.** Η σχετική απόδειξη υπάρχει στην ανάρτηση του Δ.Μάργαρη ***Έργο μιας μη σταθερής ροπής***.

$$\text{Άρα } W_{\tau_W} = W_W = -\,mg(KO) \Rightarrow W_{\tau_W} = -\,mg\frac{1}{2}$$

3ος Τρόπος

Το έργο της ροπής του βάρους W_{τ_W} κατά τη στροφική κίνηση της ράβδου είναι το έργο της δύναμης του βάρους W_W. Το βάρος W όμως είναι μία συντηρητική δύναμη και το έργο της δίνεται εξ ορισμού από τη σχέση $W_W = U_{ΑΡΧ} - U_{ΤΕΛ}$ (1). Ορίζουμε ως επίπεδο αναφοράς για τη μέτρηση της Δυναμικής Ενέργειας βαρυτικού πεδίου το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση K του κέντρου μάζας της ράβδου στην αρχική της (κατακόρυφη) θέση, άρα $U_{ΑΡΧ} = 0$ και από τη σχέση (1):

$$W_W = -\,mg\frac{1}{2}.$$

Σχόλιο

Οι τρεις τρόποι παρατίθενται για να καταδειχθεί ότι στην περίπτωση που η δύναμη της οποίας ζητείται το έργο της ροπής της είναι συντηρητική, προτιμάται προφανώς ο **3ος Τρόπος.** Για παράδειγμα σε εφαρμογές του Θεωρήματος Έργου Ενέργειας σε στροφική κίνηση. Αν η δύναμη **ΔΕΝ** είναι συντηρητική και μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της σε καμπύλη τροχιά με αποτέλεσμα η ροπή της να είναι μεταβλητού μέτρου, κατ' ανάγκη χρησιμοποιούμε το **2ο Τρόπο**.

Ο 1ος Τρόπος είναι η γενίκευση και χρησιμοποιείται όταν το μέτρο της ροπής της δύναμης δεν είναι σταθερό είτε επειδή η δύναμη είναι μεταβλητού μέτρου είτε επειδή μεταβάλλεται ο μοχλοβραχίονας. Αν το μέτρο της ροπής είναι γραμμική συνάρτηση της γωνίας: $\tau = \alpha\hat{\varphi} + \beta$ όπου α και β σταθερές τότε ο υπολογισμός του έργου της ροπής γίνεται εύκολα με υπολογισμό του εμβαδού του αντίστοιχου χωρίου.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ.Στεργιάδης