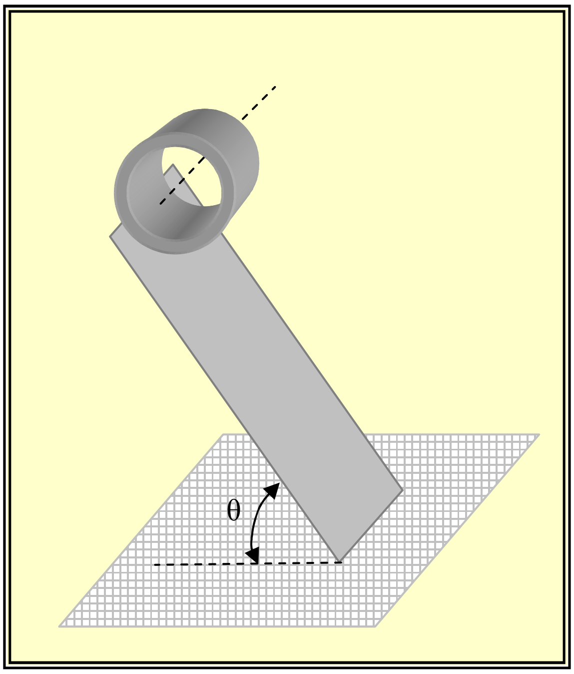
Κύλιση χωρίς ολίσθηση και κύλιση με ταυτόχρονη ολίσθηση

Ένας κύλινδρος με ακτίνα βάσης $\mathbf{R = 0,3m}$ του οποίου όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην παράπλευρη επιφάνεια του αφήνεται να κινηθεί από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου με τον άξονα του παράλληλο στο οριζόντιο επίπεδο.



(α) Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κυλίνδρου και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\boldsymbol{\mu = 0,4}$ και θεωρηθεί ίσος με το συντελεστή στατικής ή οριακής τριβής δείξτε ότι για να κυλίεται ο κύλινδρος χωρίς να ολισθαίνει θα πρέπει $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta} < 0{,}8$.

(β) Ρυθμίζουμε τη γωνία $\boldsymbol{\theta}$ μεταξύ οριζόντιου και κεκλιμένου επιπέδου έτσι ώστε $\boldsymbol{\eta\mu\theta = 0,6}$ και αφήνουμε τον κύλινδρο να κινηθεί από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου με τον άξονα του παράλληλο στο οριζόντιο επίπεδο. Αν ο κύλινδρος μετατοπίζεται συνολικά κατά $\mathbf{S = 2,8m}$ μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου και με δεδομένο ότι η μάζα του είναι $\mathbf{m = 1Kg}$ βρείτε το ποσό θερμότητας που εκλύεται κατά την κίνηση του αυτή.

(γ) Επαναρρυθμίζουμε τη γωνία $\boldsymbol{\theta}$ μεταξύ οριζόντιου και κεκλιμένου επιπέδου έτσι ώστε $\boldsymbol{\eta\mu\theta = 0,8}$ και αφήνουμε ξανά τον κύλινδρο να κινηθεί από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου με τον άξονα του παράλληλο στο οριζόντιο επίπεδο. Ο κύλινδρος μετατοπίζεται και πάλι συνολικά κατά $\mathbf{S = 2,8m}$ μέχρι να φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου. Υπολογίστε την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου ως προς τον άξονα του. Βρείτε το ποσό θερμότητας που εκλύεται τώρα κατά την κίνηση του. Υπενθυμίζεται ότι η μάζα του κυλίνδρου είναι $\mathbf{m = 1Kg}$.

Δίνεται ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $\mathbf{g = 10\frac{m}{s^2}}$.

Απάντηση

Υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του «κυλινδρικού φλοιού», ως προς τον άξονα του, διαμερίζοντας τον σε στοιχειώδεις μάζες Δm_1, Δm_2, ... :

$$\mathbf{I_K} = \Delta m_1 R^2 + \Delta m_2 R^2 + \cdots = (\Delta m_1 + \Delta m_2 + \cdots)R^2 = \mathbf{mR^2}$$

(α) Έστω ότι ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

$$a_{cm} = R\alpha_\gamma \qquad (1)$$

Κατά τη διεύθυνση του χ-άξονα (μεταφορική κίνηση):

$$\mathrm{mg\eta\mu\theta - T = ma_{cm}} \qquad (2)$$

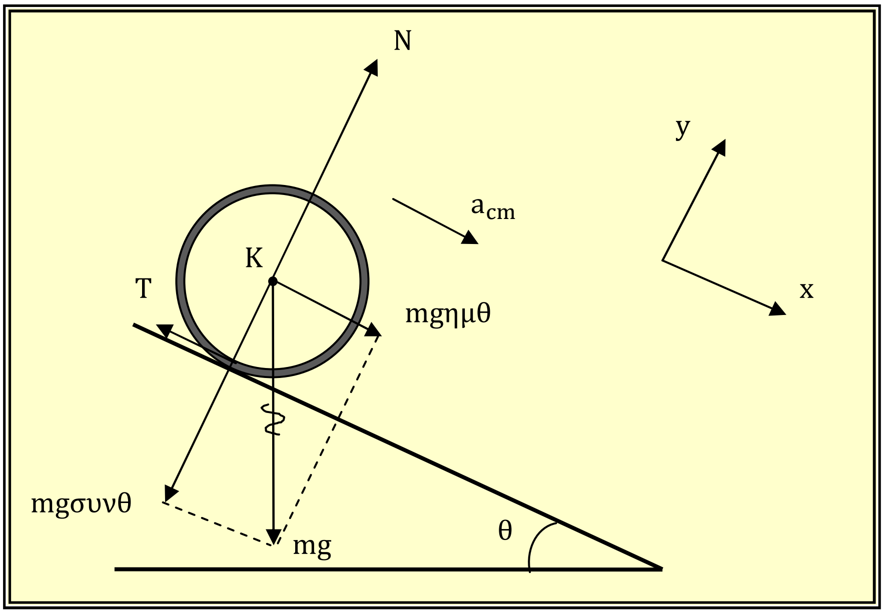
Στροφική κίνηση:

$$\mathrm{RT = mR^2\alpha_\gamma} \;\Rightarrow\; \mathrm{T = mR\alpha_\gamma} \qquad (3)$$

και με βάσει την (1)

$\mathrm{T = ma_{cm}}$ η οποία σε συνδυασμό με την (2) δίνει

$$\mathrm{T = \frac{mg\eta\mu\theta}{2}} \qquad (4)$$



Για να μην υπάρχει ολίσθηση θα πρέπει $\mathrm{T < \mu N}$

Αλλά κατά τη διεύθυνση του y-άξονα

$$\mathrm{N = mg\sigma\upsilon\nu\theta} \qquad (5)$$

Οπότε η ανισωτική σχέση γράφεται $\frac{\mathrm{mg\eta\mu\theta}}{2} < \mu mg\sigma\upsilon\nu\theta$ ή

$$\mathrm{\varepsilon\varphi\theta < 2\mu = 0{,}8}$$

Δηλαδή για να μην έχουμε ολίσθηση θα πρέπει:

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta} < 0{,}8.$$

(β) Δεδομένου ότι η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι οξεία

$$\mathrm{\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1-(\eta\mu\theta)^2} = 0{,}8}$$

και

$$\mathrm{\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 0{,}77 < 0{,}8}$$

Δηλαδή θα έχουμε κύλιση άνευ ολίσθησης, οπότε η τριβή θα είναι στατική και το έργο της θα είναι μηδέν μιας και η ταχύτητα του σημείου εφαρμογής της ως προς το κεκλιμένο επίπεδο είναι μηδέν.

Για την εκλυόμενη θερμότητα λοιπόν θα έχουμε:

$$\mathbf{Q = |W_T| = 0}$$

όπου με W_T έχουμε συμβολίσει το έργο της τριβής.

(γ) Τώρα

$$συνθ = \sqrt{1-(ημθ)^2} = 0{,}6$$

$$εφθ = \frac{ημθ}{συνθ} = \frac{4}{3} > 0{,}8$$

οπότε θα έχουμε **κύλιση με ταυτόχρονη ολίσθηση** και η τριβή θα είναι **τριβή ολίσθησης**.

Εδώ **δεν ισχύει** η σχέση $a_{cm} = Rα_γ$. Όμως έχουμε αντί αυτής την

$$\mathbf{T} = μN = \boldsymbol{μmgσυνθ} = \mathbf{2,4N} \quad (6)$$

αφού και εδώ $N = mgσυνθ$.

Από (2), (6) έχουμε $mgημθ - μmgσυνθ = ma_{cm} \Rightarrow$

$$\mathbf{a_{cm} = g(ημθ - μσυνθ)}$$

$$\mathbf{a_{cm} = 5,6\frac{m}{s^2}}$$

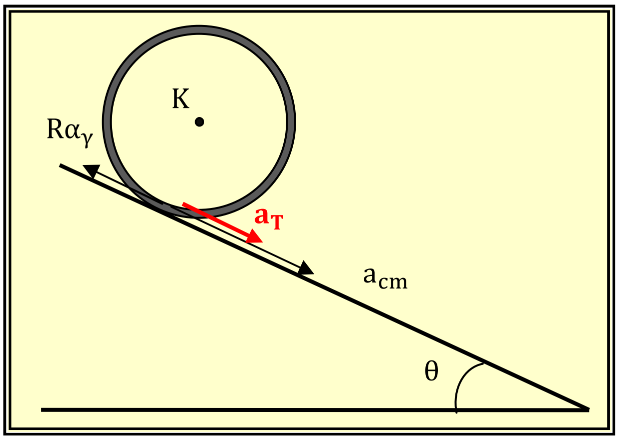
Από (3), (6) έχουμε $μmgσυνθ = mRα_γ \Rightarrow$

$$\boldsymbol{α_γ = \frac{μgσυνθ}{R}}$$

$$\boldsymbol{α_γ = 8\frac{rad}{s^2}}$$

Ο χρόνος κίνησης μπορεί να υπολογισθεί από τη μεταφορική κίνηση του στερεού. Δηλαδή $S = \frac{1}{2}a_{cm}t^2 \Rightarrow$

$$\mathbf{t = \sqrt{\frac{2S}{a_{cm}}} = 1s}$$



Το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο θα κινείται με επιτάχυνση (ως προς το κεκλιμένο επίπεδο)

$$\mathbf{a_T = a_{cm} - Rα_γ = 3,2\frac{m}{s^2}}$$

Δηλαδή κατά τη διάρκεια της κίνησης το σημείο εφαρμογής της τριβής θα μετατοπίζεται σε σχέση με το κεκλιμένο επίπεδο κατά

$$\mathbf{S_T = \frac{1}{2} a_T t^2 = 1{,}6m}$$

Συνεπώς το εκλυόμενο ποσό θερμότητας τώρα θα είναι

$$\mathbf{Q = |W_T| = |-TS_T| = 3{,}84J}$$

Το παραπάνω ποσό θερμότητας θα μπορούσε να υπολογιστεί και διαφορετικά. Δείτε ένα παρόμοιο πρόβλημα του Διονύση Μάργαρη, όπου γίνεται υπολογισμός της θερμότητας με διαφορετικό τρόπο και στη συνέχεια το αποτέλεσμα τσεκάρεται με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης της ενέργειας, στην τοποθεσία .

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Εμμανουήλ Λαμπράκης