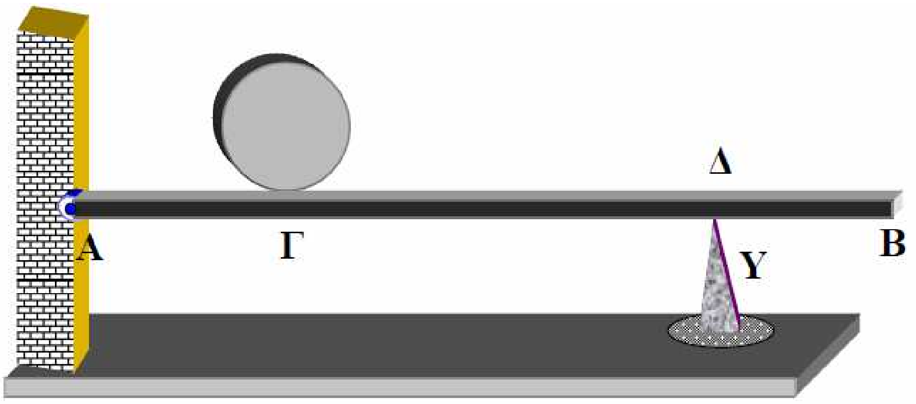
Κύλινδρος σε οριζόντια δοκό.



Η ομογενής δοκός ΑΒ του σχήματος , μήκους ℓ=12m και μάζας Μ = 30kg, ισορροπεί σε οριζόντια θέση ακουμπώντας σε κατακόρυφο υποστήριγμα Υ και με το άκρο της Α αρθρωμένο σε κατακόρυφο τοίχο.

Το υποστήριγμα Υ, απέχει από το άκρο Β της δοκού απόσταση ΔΒ = ℓ/4.

Ένας κύλινδρος μάζας m = 18kg και ακτίνας R = ℓ/8 ηρεμεί πάνω στην δοκό σε απόσταση ΑΓ = ℓ/4 από τον τοίχο.

i) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις που δέχεται η δοκός από το υποστήριγμα και από την άρθρωση.

Μέσω ενός αβαρούς μη εκτατού νήματος που είναι τυλιγμένο στην περιφέρεια του κυλίνδρου, ασκούμε στον κύλινδρο κατακόρυφη δύναμη , μέτρου F = 18N με φορά προς τα επάνω, κατά την εφαπτομένη προς την μεριά του τοίχου , με αποτέλεσμα αυτός ν' αρχίσει να κυλίεται πάνω στη δοκό χωρίς να ολισθαίνει.

ii) Να υπολογίσετε τη στατική τριβή μεταξύ κυλίνδρου - δοκού και να τη σχεδιάσετε.

iii) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου την στιγμή που φτάνει στο σημείο Δ.

iv) Υπολογίσετε τον ρυθμό που προσφέρεται ενέργεια στον κύλινδρο την στιγμή που βρίσκεται στο σημείο Δ.

Έστω δυο τυχαία σημεία Κ, Λ της τροχιάς του κέντρου μάζας του κυλίνδρου πάνω στη δοκό , που απέχουν μεταξύ τους κατά d = ℓ/8. Να υπολογίσετε:

v) Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου λόγω περιστροφικής κίνησης γύρω από τον άξονά του, μεταξύ των σημείων Κ, Λ.

vi) Την ενέργεια που προσφέρεται στον κύλινδρο μέσω του έργου της δύναμης F, και το ποσοστό που αυτή μετατρέπεται

i. σε κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης και

ii. σε κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης , κατά την μετατόπιση από το Κ μέχρι το Λ.

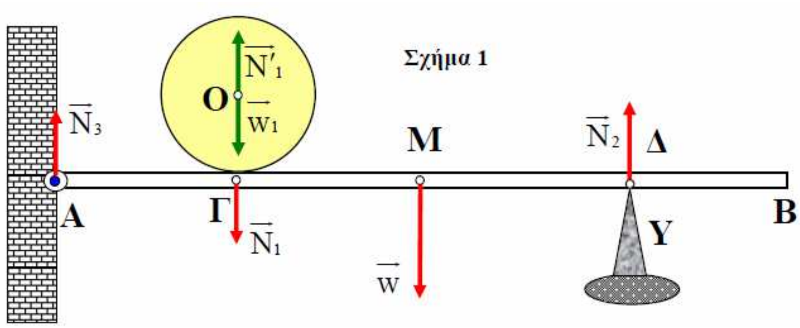
vii) Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου κατά την κίνησή του πάνω στη δοκό.

Δίνεται g = 10 m/s² και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του Icm = mR²/2.

Απάντηση

i) Η δοκός ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Άρα

$$\Sigma\tau_{(A)} = 0 \text{ ή } N_2(A\Delta) - w(AM) - N_1(A\Gamma) + N_3 \cdot 0 = 0 \text{ ή } N_2\frac{3\ell}{4} = w\frac{\ell}{2} + N_1\frac{\ell}{4} \quad (1)$$

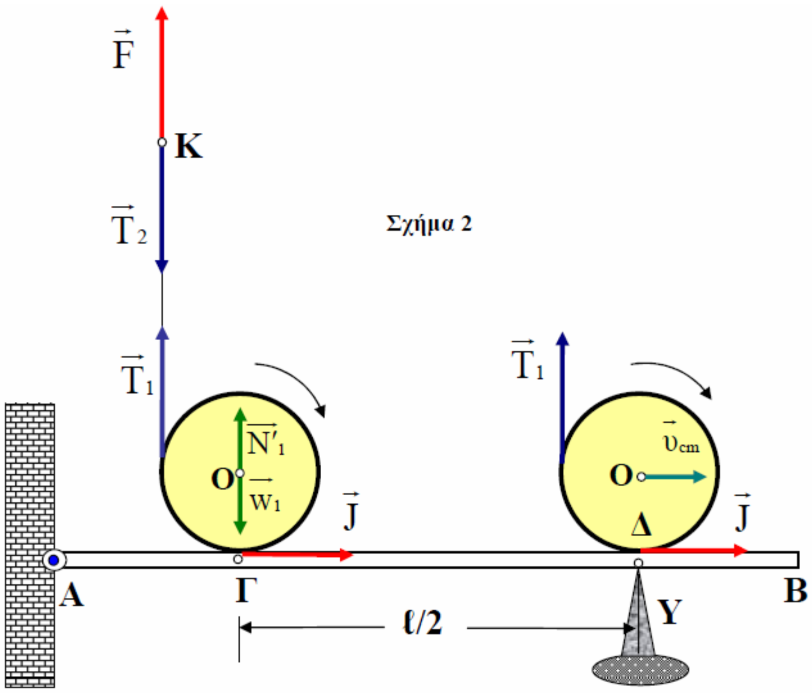


Από την ισορροπία του κυλίνδρου έχουμε ότι $\vec{N'}_1 + \vec{w}_1 = \vec{0}$ ή $N'_1 = w_1$ (2) όπου $\vec{N'}_1$ η δύναμη που δέχεται ο κύλινδρος από τη δοκό. Αλλά $N'_1 = N_1$ (3) επειδή έχουν σχέση δράσης - αντίδρασης , οπότε από την (1) με βάση τις (2) , (3) έχουμε

$N_2 = \dfrac{2w + w_1}{3}$ ή $N_2 = \left(\dfrac{2M + m}{3}\right)g = 260N$ (4) και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

Εξ άλλου πρέπει $\vec{N}_3 + \vec{N}_1 + \vec{w} + \vec{N}_2 = \vec{0}$ ή $N_3 = w_1 + w - N_2$ και με βάση την (4) και τα δεδομένα $N_3 = 220N$ και φορά όπως φαίνεται στο σχήμα 1.

ii) Αφού ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, δέχεται και στατική τριβή $\vec{J}$, η οποία έστω ότι έχει φορά προς τα δεξιά όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Η τάση του νήματος $\vec{T}_1$ που ασκείται στον κύλινδρο, είναι ίση με τη δύναμη $\vec{F}_1$ επειδή το νήμα είναι αβαρές. Έτσι για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε

$$\left(T_1 - J\right)R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \text{ ή } F - J = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (5)$$

Όμως επειδή η κύλιση γίνεται χωρίς ολίσθηση ισχύει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$ οπότε η (5) γράφεται έτσι

$$F - J = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} \quad (6)$$

Για την μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου έχουμε ότι

$$J = m\alpha_{cm} \quad (7)$$

Από την (6) με βάση την (7) έχουμε ότι $F - J = \frac{J}{2}$ ή $F = \frac{3J}{2}$ ή $J = \frac{2F}{3} = 12N > 0$ (8) άρα σωστά σχεδιάσαμε την στατική τριβή προς τα δεξιά.

Επειδή η μόνη δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο στη οριζόντια διεύθυνση είναι η στατική τριβή , ο κύλινδρος θα κινηθεί πάνω στη δοκό κατά τη φορά της, δηλαδή προς το σημείο Β.

iii) Επειδή το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι ίσο με μηδέν , με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ των σημείων Γ και Δ έχουμε

$$\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 = W_F \text{ ή } \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 = F\cdot R\cdot\Delta\theta$$

και επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση $(\Gamma\Delta) = R\cdot\Delta\theta$ άρα

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 = F\cdot(\Gamma\Delta) = F\frac{\ell}{2} \text{ ή } \upsilon_{cm} = \sqrt{\frac{2F\ell}{3m}} = 2\sqrt{2}\frac{m}{s} \quad (9)$$

iv) Ο ρυθμός που προσφέρεται ενέργεια στον κύλινδρο, ισούται με την ισχύ της δύναμης $\vec{F}$ δηλαδή $P_F = FR\omega$, και επειδή δεν έχουμε ολίσθηση $P_F = F\cdot\upsilon_{cm}$.

Οπότε στο σημείο Δ με βάση την (9) $P_F = 18N\cdot 2\sqrt{2}\frac{m}{s} = 36\sqrt{2}j/s$.

v) Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής είναι

$$\Delta K_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} = W_{\Sigma\tau(O)} = (F - J)R\cdot\Delta\theta \text{ ή } \Delta K_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} = (F - J)d \text{ και με βάση την (8)}$$

$$\Delta K_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} = \left(F - \frac{2F}{3}\right)d = \frac{F}{3}d = \frac{F}{3}\cdot\frac{\ell}{8} = 9j \quad (10)$$

vi) Η ενέργεια που προσφέρεται μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ είναι

$$E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = W_F = F\cdot R\cdot\Delta\theta = F\cdot d \text{ ή } E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = F\cdot\frac{\ell}{8} = 27\,j \; (11)$$

Με βάση την αρχή διατήρησης της ενέργειας έχουμε ότι

$$E_{\pi\rho o\sigma\varphi} = \Delta K_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho} + \Delta K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} \text{ ή } \Delta K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} = E_{\pi\rho o\sigma\varphi} - \Delta K_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho}$$

και με βάση τις (10) και (11)

$$\Delta K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi} = 18j$$

Άρα από το σύνολο της ενέργειας που προσφέρθηκε κατά την μετατόπιση από το Κ μέχρι το Λ μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης ποσοστό

$$\pi_1 = \frac{\Delta K_{\mu\varepsilon\tau\alpha\varphi}}{E_{\pi\rho o\sigma\varphi}} \cdot 100\% = \frac{18}{27} \cdot 100\% = \frac{200}{3}\%$$

και σε κινητική ενέργεια λόγω περιστροφικής κίνησης

$$\pi_2 = \frac{\Delta K_{\pi\varepsilon\rho\iota\sigma\tau\rho}}{E_{\pi\rho o\sigma\varphi}} \cdot 100\% = \frac{9}{27} \cdot 100\% = \frac{100}{3}\%$$

vii) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου καθώς αυτός κινείται πάνω στη δοκό, είναι

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{o\lambda(O)} \;\; ή \;\; \frac{dL}{dt} = (F - J)R$$

και με βάση την (8) και τα δεδομένα

$$\frac{dL}{dt} = 9Kgm^2/s^2, \;\; \text{με διεύθυνση τον άξονα του κυλίνδρου και φορά } \frac{d\vec{L}}{dt} \otimes .$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης