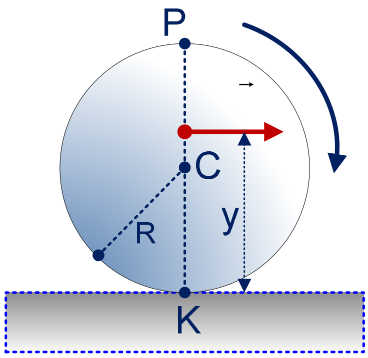
Κυκλικός Δίσκος ο οποίος Δέχεται Εξωτερική Δύναμη & Εκτελεί Κύλιση Χωρίς Ολίσθηση

Ένας κυκλικός δίσκος μάζας m=4Kg και ακτίνας R=0,2m ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή t=0, ασκείται στον κυκλικό δίσκο σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F=15N & αρχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει (ο συντελεστής τριβής μ σε κάθε περίπτωση παίρνει την ελάχιστη δυνατή τιμή) κατά μήκος του οριζοντίου επιπέδου. Εάν ο φορέας της δύναμης βρίσκεται στο επίπεδο του δίσκου και απέχει απόσταση y από το οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: μαργ121254



i) Να προσδιορίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις και να κατασκευάσετε τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

$$α)\ α=f(y) \quad β)\ T=f(y) \quad γ)\ μ_{min}=f(y)$$

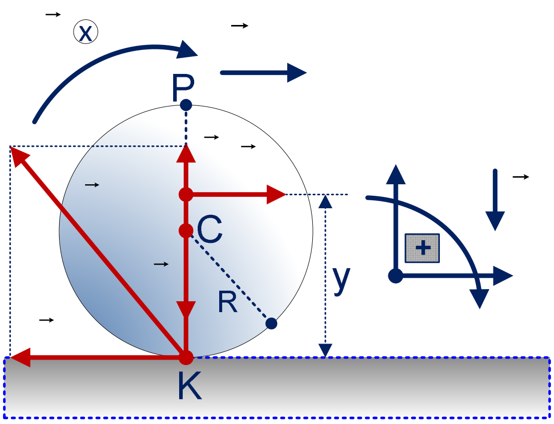
ii) Ποια η φόρα και ποιο το μέτρο της τριβής, όταν η δύναμη F ασκείται στα σημεία C, P;

iii) Σε πόση απόσταση (y) από το οριζόντιο επίπεδο πρέπει να ασκηθεί η δύναμη F, ώστε η συνολική δύναμη που δέχεται ο κυκλικός δίσκος από αυτό να είναι ίση με το βάρος του;

iv) Αν σε κάποια χρονική στιγμή η κινητική ενέργεια του κυκλικού δίσκου είναι K=90π J και η δύναμη F ασκείται σε απόσταση από το οριζόντιο επίπεδο ίση με εκείνη που προκύπτει από το ερώτημα 3, να προσδιορίσετε τον αριθμό των περιστροφών που έχει εκτελέσει ο κυκλικός δίσκος καθώς και το διάστημα που έχει διανύσει ως αυτή τη χρονική στιγμή.

Δίνεται: $I_{cm\,(κυκλικού\ δίσκου)} = \frac{1}{2}mr^2$, $g = 10\,m/s^2$

Απάντηση:



Ερώτημα 1:

Στο κυκλικό δίσκο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Το βάρος του **W,** η οριζόντια δύναμη **F** και η αντίδραση $\mathbf{F_A}$ από το οριζόντιο επίπεδο στο σημείο Κ, την οποία αν την αναλύσουμε σε συνιστώσες, η μια από αυτές θα είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω (αντίδραση **N**), ενώ η άλλη θα είναι οριζόντια (Στατική Τριβή **T** - Δε μπορούμε να γνωρίζουμε εξαρχής τη φορά της).

Υποθέτουμε ότι η τριβή **T έχει φορά προς τα αριστερά.** Τότε από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau}_c = I_{cm}\cdot\vec{\alpha}_{γων.} \Rightarrow W\cdot 0 + N\cdot 0 + T\cdot R + F\cdot(y-R) = I_{cm}\cdot\alpha_{γων.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\cdot R + F\cdot(y-R) = I_{cm}\cdot\alpha_{γων.} \xrightarrow{\alpha_c=\alpha_{γων.}\cdot R} \alpha_c = \frac{T\cdot R^2 + F\cdot R\cdot(y-R)}{I_{cm}} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2} \alpha_c = \frac{2T + 2F\cdot\left(\frac{y-R}{R}\right)}{m}$$

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\overrightarrow{\Sigma F}_x = m\cdot\vec{\alpha}_c \Rightarrow F - T = m\cdot\alpha_c \Rightarrow T = F - m\cdot\alpha_c$$

Οπότε με συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων θα έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha_c = \dfrac{2T + 2F\cdot\left(\frac{y-R}{R}\right)}{m} \\ T = F - m\cdot\alpha_c\end{cases} \Rightarrow \alpha_c = \frac{2(F-m\cdot\alpha_c) + 2F\cdot\left(\frac{y-R}{R}\right)}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R\cdot(F - m\cdot\alpha_c) + 2F\cdot(y-R) = mR\cdot\alpha_c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2mR\cdot\alpha_c + mR\cdot\alpha_c = 2R\cdot F + 2F\cdot(y-R) \Rightarrow \alpha_c = \frac{2F}{3mR}\cdot y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_c = \frac{2\cdot 15}{3\cdot 4\cdot 0{,}2}\cdot y \Rightarrow \alpha_c = 12{,}5\cdot y, \left(\alpha_c \to \frac{m}{s^2}, y \to m\right)$$

και

$$T = F - m\cdot\alpha_c \Rightarrow T = F - \frac{2F\cdot m}{3mR}\cdot y \Rightarrow T = F\cdot\frac{3R-2y}{3R} \Rightarrow T = 15\cdot\frac{3\cdot 0{,}2 - 2y}{3\cdot 0{,}2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 15 - 50\cdot y, (T\to N, y \to m)$$

Σχόλιο 1! Αν η τιμή της τριβή T είναι θετικός αριθμός τότε έχει φορά προς τα αριστερά, όπως υποθέσαμε αρχικά. Αντίθετα αν η τιμή της είναι αρνητικός αριθμός έχει φορά προς τα δεξιά.

Σχόλιο 2! Για y=0 προκύπτει T = F. Δηλαδή όταν η δύναμη F ασκείται στο κατώτερο σημείο, ο κυκλικός δίσκος δεν κινείται.

Ο κυκλικός δίσκος για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, πρέπει να ισχύει:

$$|T| \le T_{\sigma(max)} \Rightarrow |T| \le \mu \cdot N \overset{N=W}{\Longrightarrow} |T| \le \mu \cdot W \Rightarrow \mu \ge \frac{|T|}{W} \Rightarrow$$

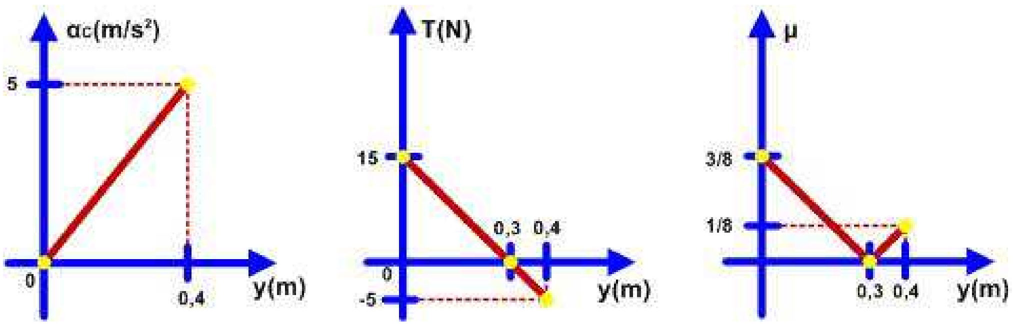
$$\xrightarrow{|T|=\left|F-\frac{2F}{3R}\cdot y\right|} \mu \ge \left|\frac{F}{W} - \frac{2F}{3RW}\cdot y\right| \Rightarrow \mu \ge \left|\frac{3}{8} - \frac{5}{4}\cdot y\right| \Rightarrow \text{άρα } \mu_{(min)} = \left|\frac{3}{8} - \frac{5}{4}\cdot y\right|$$

Για την απόσταση y θα ισχύει:

$$\mathbf{0m \le y \le 0,4m}$$

Γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων

α) α=f(y) β) T=f(y) γ)μ_{min}=f(y)



Ερώτημα 2:

- Όταν η δύναμη F ασκείται στο σημείο C → y=R=0,2m,
- Όταν η δύναμη Fασκείται στο σημείο P → y=2R=0,4m

$$\begin{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_c = R = 0{,}2m \\ T_C = 15 - 50\cdot y_c \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} y_p = 2R = 0{,}4m \\ T_p = 15 - 50\cdot y_p \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = R = 0{,}2m \\ T_C = 15 - 50\cdot R \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} y_p = 2R = 0{,}4m \\ T_p = 15 - 50\cdot 2R \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = R = 0{,}2m \\ T_C = 5N > 0 \Rightarrow \text{φορά προς τα αριστερά} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} y_p = 2R = 0{,}4m \\ T_p = -5N < 0 \Rightarrow \text{φορά προς τα δεξιά} \end{cases} \end{cases}$$

Ερώτημα Α.3:

Η συνολική δύναμη που δέχεται ο κυκλικός δίσκος από το οριζόντιο επίπεδο είναι:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Διανυσματικά } \vec{F}_A = \vec{N} + \vec{T} \\ \text{Κατα Μέτρο: } F_A = \sqrt{N^2 + T^2} \end{cases}$$

Οπότε, η δύναμη F_A γίνεται ίση με το βάρος **W** του δίσκου (F_A=**W**, κατά μέτρο), όταν μηδενιστεί η τριβή. Δηλαδή:

$$T = 0 \Rightarrow T = 15 - 50 \cdot y = 0 \Rightarrow y = \frac{15}{50} m = 0{,}3 m$$

Άρα έχουμε FA=W → όταν η Δύναμη F ασκείται σε απόσταση 0,3m από το οριζόντιο επίπεδο.

Ερώτημα Α.4:

Αριθμός των περιστροφών που εκτελεί ο δίσκος, μέχρι τη στιγμή που η Κινητική του ενέργεια γίνεται 90π J είναι:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Σε } \mathbf{1} \text{ περιστροφή ο δίσκος διαγράφει γωνία } \mathbf{2\pi} \\ \text{Σε } \mathbf{n_1} \text{ περιστροφές ο δίσκος διαγράφει γωνία } \boldsymbol{\theta_1}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_1} = \frac{2\pi}{\theta_1} \Rightarrow n_1 = \frac{\theta_1}{2\pi}$$

Το διάστημα που διανύει ως αυτή τη χρονική στιγμή είναι: $S_1 = R \cdot \theta_1$

Για τον υπολογισμό της γωνίας θ_1 εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μεταβολής της Κινητικής Ενέργειας (η τριβή είναι μηδέν διότι y=0,3m, οπότε W_T=0, W_N=0, W_W=0)

$$K_{τελ.} - K_{αρχ.} = W_{F(μετ.)} + W_{F(περ.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = F \cdot S_1 + F \cdot (y - R) \cdot \theta_1 \xRightarrow{S_1 = R \cdot \theta_1} K = F \cdot R \cdot \theta_1 + F \cdot (y - R) \cdot \theta_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{K}{F \cdot y} \Rightarrow \theta_1 = \frac{90\pi}{15 \cdot 0{,}3} rad \Rightarrow \theta_1 = 20\pi \, rad$$

Τελικά:

$$S_1 = R \cdot \theta_1 \Rightarrow S_1 = 0{,}2 \cdot 20\pi \, m \Rightarrow S_1 = 4\pi \, m$$

$$n_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} \Rightarrow n_1 = \frac{20\pi}{2\pi} \text{ περιστροφές} \Rightarrow n_1 = 10 \text{ περιστροφές}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης