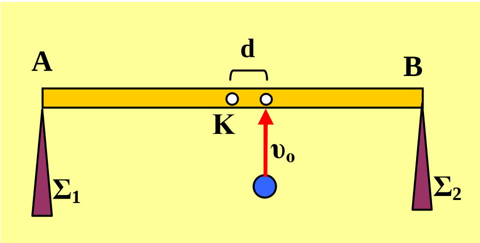
Κρούση, στροφή και κατακόρυφη βολή



Η ράβδος ΑΒ του σχήματος, είναι ομογενής έχει μήκος ℓ και ι-σορροπεί σε οριζόντια θέση ακουμπώντας με τα άκρα της Α και Β σε δυο κατακόρυφα υποστηρίγματα Σ_1, Σ_2 .

Ένα σφαιρίδιο αμελητέων διαστάσεων, με μάζα ίση με το μισό της μάζας της ράβδου, κινείται κατακόρυφα προς τα επάνω και χτυπά σε ένα σημείο της ράβδου, το οποίο απέχει κατά d = ℓ/24 από το κέντρο μάζας της Κ.

Η κρούση είναι ελαστική , διαρκεί αμελητέο χρόνο, και αμέσως μετά απ' αυτήν η φορά της ταχύτητας του σφαιριδίου αντιστρέφεται.

Η ράβδος μετά την κρούση , αφού εκτελέσει γύρω από το κέντρο μάζας της περιστροφή κατά φ = π rad, ξαναπέφτει πάνω στα ίδια στηρίγματα έτσι ώστε το άκρο της Β να ακουμπήσει πάνω στο Σ_1 και το άκρο Α στο Σ_2 .

Να υπολογιστούν :

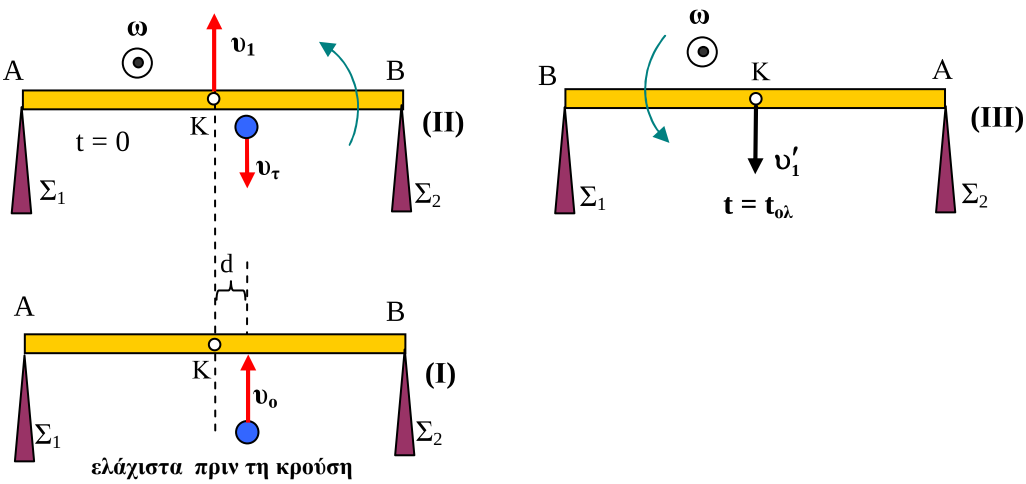
i) Η ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

ii) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.

iii) Οι ταχύτητες του σφαιριδίου πριν και μετά την κρούση.

Δίνεται το μήκος της ράβδου ℓ , η επιτάχυνση της βαρύτητας g , και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το κέντρο μάζας της $I = (1/12)M\ell^2$.

Απάντηση



i) Με βάση την αρχή της διατήρησης της ορμής για την κρούση έχουμε ότι

$$\frac{M}{2}\upsilon_o = M\upsilon_1 - \frac{M}{2}\upsilon_\tau \;\; ή \;\; \upsilon_o = 2\upsilon_1 - \upsilon_\tau \quad (1)$$

και με βάση την αρχή της διατήρησης της στροφορμής

$$\frac{M}{2}\upsilon_o\frac{\ell}{24}=\frac{1}{12}M\ell^2\omega-\frac{M}{2}\upsilon_\tau\frac{\ell}{24}\quad ή\quad \upsilon_o=4\ell\omega-\upsilon_\tau \quad (2)$$

από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\upsilon_1=2\ell\omega$ (3)

Μετά την κρούση, η ράβδος δεν δέχεται ροπή , λόγω του ότι το βάρος της , μοναδική δύναμη που δρα πάνω της, διέρχεται από το κέντρο της περιστροφής, που είναι το κέντρο μάζας, άρα η ράβδος δεν επιταχύνεται γωνιακά και η γωνιακή της ταχύτητα παραμένει σταθερή.

Θα έχομε λοιπόν ότι

$$\Delta\phi=\omega\cdot\Delta t\quad ή\quad \pi=\omega\cdot t_{ολ}\quad ή\quad t_{ολ}=\frac{\pi}{\omega}\quad (4)$$

Εξ' άλλου η ράβδος εκτελεί κατακόρυφη βολή προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_1$

Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την κατακόρυφη κίνηση της ράβδου από την χρονική στιγμή t = 0 μέχρι που επιστρέφει στην οριζόντια θέση πάνω στα υποστηρίγματα – θέσεις (ΙΙ) , (ΙΙΙ) έχομε

$$\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}M\left(\upsilon_1'\right)^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

άρα $\upsilon' = -\upsilon_1$

όμως $\upsilon'=\upsilon_1-gt$ ή $-\upsilon_1=\upsilon_1-gt_{ολ}$ ή $t_{ολ}=\dfrac{2\upsilon_1}{g}$ (5)

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι $\omega=\dfrac{\pi g}{2\upsilon_1}$ (6)

από τις (3) και (6) έχομε $\upsilon_1=\dfrac{2\ell g\pi}{2\upsilon_1}$ ή $\upsilon_1^2=g\ell\pi$ ή

$$\boldsymbol{\upsilon_1=\sqrt{g\ell\pi}}\quad \textbf{(7)}$$

ii). Από την (6) με βάση την (7) έχομε

$$\omega=\frac{g\pi}{2\sqrt{g\ell\pi}}\quad ή$$

$$\boldsymbol{\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\pi}{\ell}}}\quad (8)$$

iii) Κατά την κρούση δεν χάνεται ενέργεια άρα

$$\frac{1}{2}\frac{M}{2}\upsilon_o^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}M\ell^2\omega^2+\frac{1}{2}M\upsilon_1^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{M}{2}\upsilon_\tau^2\quad (9)$$

Από την (9) με βάση και τις (2) , (8) προκύπτει τελικά

$$\upsilon_\tau=\frac{47}{96}\sqrt{g\ell\pi}\quad (10)$$

και από την (2) με βάση τις (8) , (10)

$$\boldsymbol{\upsilon_o=\frac{145}{96}\sqrt{g\ell\pi}}$$

Επιμέλεια
Μανώλης Δρακάκης