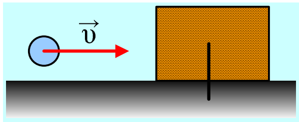
Ισχύουν οι αρχές διατήρησης; Πώς εφαρμόζονται;



- Ένα βλήμα σφηνώνεται σε ένα ξύλο που είναι πακτωμένο στο έδαφος.
  Για την κρούση αυτή ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής (Α.Δ.Ο.), για το σύστημα βλήμα - ξύλο;
- Όχι κύριε. Το σύστημα των σωμάτων δε είναι μονωμένο.
- Και λοιπόν;
- Δεν ισχύει η Α.Δ.Ο.
- Μα, τι λέει η Α.Δ.Ο. Γιάννη;

Υπάρχουν μερικά πράγματα που περνάμε συνήθως ελαφρά. Έχει δίκιο ο Γιάννης στην απάντησή του; Και αν έπεφτε ένα τέτοιο ερώτημα στις εξετάσεις, τι θα έπρεπε να απαντήσει ο κάθε Γιάννης;

Είναι η ίδια απάντηση, με αυτήν που θα έπρεπε να δώσει στο ερώτημα:

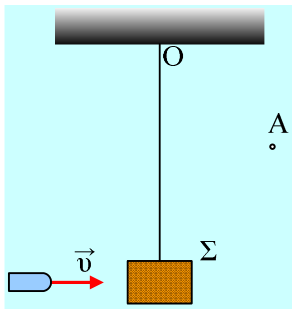
Η ορμή του συστήματος βλήμα-ξύλο παραμένει σταθερή κατά την κρούση;

Συνήθως θεωρούμε ότι οι δυο ερωτήσεις είναι ταυτόσημες. Και όμως δεν είναι!!!

Η Α.Δ.Ο. ισχύει *πάντα*. Τι λέει; Ότι αν ένα σύστημα σωμάτων είναι μονωμένο η ορμή του παραμένει σταθερή. Και τι δεν λέει, αλλά υπονοεί; Ότι αν το σύστημα δεν είναι μονωμένο η ορμή του δεν παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση, ας πούμε του παραπάνω παραδείγματος, παραβιάζεται η αρχή; Όχι βέβαια. Το σύστημα δεν είναι μονωμένο και η συνολική ορμή του συστήματος δεν παραμένει σταθερή. Δεν διατηρείται. Μα, αυτό μας λέει και η Α.Δ.Ο.!!!

Αλλά με την ευκαιρία ας εξετάσουμε μερικές περιπτώσεις διατήρησης ή μη (ορμής-στροφορμής) σε περιπτώσεις κρούσεων, δίνοντας κάποιες εφαρμογές.

Εφαρμογή 1:



Ένα σώμα Σ μάζας Μ κρέμεται στο άκρο αβαρούς νήματος. Ένα βλήμα μάζας m συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ. Για την παραπάνω κρούση:

i) Η ορμή του βλήματος διατηρείται.
ii) Η ορμή του συστήματος διατηρείται.
iii) Η συνολική στροφορμή ως προς το σημείο ανάρτησης Ο διατηρείται.
iv) Η συνολική στροφορμή ως προς ένα τυχαίο σημείο Α, διατηρείται.

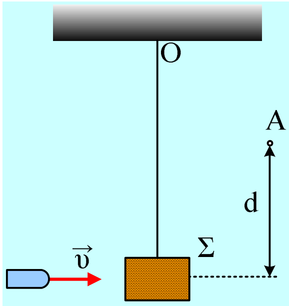
Απάντηση:

i) Η ορμή του βλήματος δεν παραμένει σταθερή, αφού θα δεχτεί δύναμη από το σώμα Σ, η οποία θα μεταβάλλει την ορμή του.

ii) Η ορμή του συστήματος διατηρείται, αφού το **θεωρούμε!** μονωμένο. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα του συστήματος, είναι τα δυο βάρη και η τάση του νήματος. Η συνισταμένη του βάρους και της τάσης για το σώμα Σ είναι μηδενική, αλλά παραμένει το βάρος του βλήματος. Θεωρώντας όμως απειροελάχιστη τη διάρκεια της κρούσης δεχόμαστε ότι η δύναμη του βάρους του βλήματος, είναι αμελητέα, συγκρινόμενη με τις εσωτερικές δυνάμεις που θα ασκηθούν στη διάρκεια της κρούσης. Συνεπώς $\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \rightarrow m\upsilon = (M+m)\upsilon_k$ (1)

iii) Η πρόταση είναι σωστή. Οι εξωτερικές δυνάμεις δεν έχουν ροπή ως προς το Ο και η στροφορμή παραμένει σταθερή. Πράγματι αν πάρουμε: $\vec{L}_{\pi\rho} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m\upsilon\ell = (M+m)\upsilon_k \ell \rightarrow$

$m\upsilon = (M+m)\upsilon_k$ δηλαδή προκύπτει η σχέση (1).

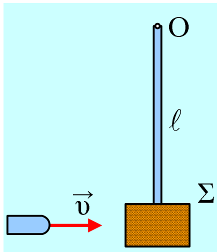


iv) Και αυτή η πρόταση είναι σωστή. Γιατί; Αν d η απόσταση του Α από τον φορέα της ταχύτητας υ, τότε από την σχέση (1) έχουμε:

$$m\upsilon = (M+m)\upsilon_k \rightarrow m\upsilon d = (M+m)\upsilon_k d \rightarrow L^A_{\pi\rho\iota\nu} = L^A_{\mu\varepsilon\tau}$$

Μα, θα αναρωτηθεί κάποιος ισχύει εδώ ότι $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi/A}=0$. Η απάντηση είναι συνέχεια της ερμηνείας στο i) ερώτημα. Αφού η η δύναμη του βάρους του βλήματος μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα, τότε αμελητέα θα είναι και η αντίστοιχη ροπή του, συγκρινόμενη με τις ροπές των εσωτερικών δυνάμεων.

Εφαρμογή 2:



Ένα σώμα Σ μάζας Μ κρέμεται στο άκρο **αβαρούς** ράβδου, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Ο. Ένα βλήμα μάζας m συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ. Για την παραπάνω κρούση:

i) Η ορμή του συστήματος διατηρείται.

ii) Η συνολική στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής διατηρείται.

Απάντηση:

Εδώ έχουμε ένα στερεό σώμα αποτελούμενο από το Σ και την αβαρή ράβδο. Συνεπώς στη διάρκεια της κρούσης δεν ξέρουμε αν θα δεχτεί δύναμη από τον άξονα, πόσο θα είναι το μέτρο της και ποια θα είναι η κατευθυνσή της. Είμαστε λοιπόν επιφυλακτικοί αν πρέπει να δεχτούμε την διατήρηση της ορμής. Όμως όποια δύναμη και αν ασκηθεί από τον άξονα, αυτή θα έχει μηδενική ροπή ως προς τον άξονα αυτόν, συνεπώς η στροφορμή του συστήματος, ως προς τον άξονα, παραμένει σταθερή. Συνεπώς:

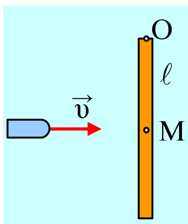
$$\vec{L}_{\pi\rho} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m\upsilon\ell = I\omega \rightarrow m\upsilon\ell = (M\ell^2 + m\ell^2)\cdot\omega_k \rightarrow m\upsilon = (M+m)\ell\omega_k$$

Αλλά $\omega\ell = \upsilon_k$ όπου υ_k η γραμμική κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος Βλήμα-Ξύλο, συνεπώς:

$$m\upsilon = (M+m)\upsilon_k$$

Πράγμα που σημαίνει ότι **ΚΑΙ** η ορμή διατηρείται. Ή με άλλα λόγια η αβαρής ράβδος, συμπεριφέρεται, **στην περίπτωση αυτή**, όμοια με το αβαρές νήμα.

Εφαρμογή 3:



Μια ομογενής ράβδος, μάζας m, μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της Ο και ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση. Ένα βλήμα μάζας m συγκρούεται πλαστικά με τη ράβδο, στο μέσον της Μ. Για την παραπάνω κρούση να εξεταστεί αν:

i) Η ορμή του συστήματος διατηρείται.

ii) Η συνολική στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής διατηρείται.

Απάντηση:

Η προηγούμενη ανάλυση ισχύει και στην περίπτωση αυτή. Αλλά τότε από την διατήρηση της στροφορμής ως προς τον οριζόντιο άξονα περιστροφής, που περνά από το Ο παίρνουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \to m\upsilon\frac{\ell}{2} = I\omega \to m\upsilon\frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4}\right)\cdot\omega_k \to m\upsilon = \frac{7}{6}m\ell\omega_k \to \omega_k = \frac{6}{7}\frac{\upsilon}{\ell}$$

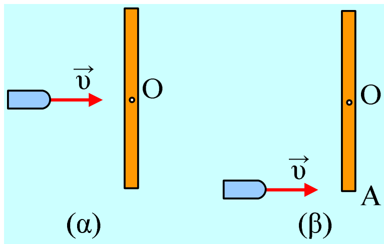
Αλλά τότε η ταχύτητα του μέσου Μ της ράβδου είναι ίση με $\upsilon_M = \omega\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{3}{7}\upsilon$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι η ορμή δεν παραμένει σταθερή, αφού αν την εφαρμόζαμε θα είχαμε

$$m\upsilon=(m+m)\upsilon_M \to \upsilon_M= ½\ \upsilon.$$

Γιατί συμβαίνει αυτό; Μα προφανώς η ράβδος δέχεται εξωτερική δύναμη από τον άξονα περιστροφής, οπότε η ορμή του συστήματος δεν διατηρείται.

Εφαρμογή 4:



Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη ηρεμούν δυο όμοιες σανίδες. Δύο όμοια βλήματα κινούμενα οριζόντια συγκρούονται με τη ράβδο. Το πρώτο κτυπά τη ράβδο στο μέσον της, το άλλο στο άκρο της Α, όπως στο σχήμα. Αν οι κρούσεις είναι πλαστικές, να βρεθεί η μεταβολή της ορμής κάθε βλήματος, που οφείλεται στην κρούση. Η σανίδες και τα βλήματα έχουν ίσες μάζες m. Η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της είναι $I = \frac{1}{12}m\ell^2$.

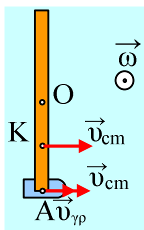
Απάντηση:

Στις παραπάνω κρούσεις το σύστημα των σωμάτων είναι μονωμένο, συνεπώς η ορμή παραμένει σταθερή.

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \to m\upsilon = (m+m)\upsilon_{cm} \to \upsilon_{cm} = \frac{\upsilon}{2}$$

Εξάλλου στην (α) περίπτωση, η δύναμη που ασκεί το βλήμα στη διάρκεια της κρούσης, στη ράβδο, περνά από το κέντρο μάζας της Ο, συνεπώς έχει μηδενική ροπή ως προς το κέντρο μάζας και η σανίδα δεν πρόκειται να περιστραφεί. Θα εκτελέσει απλά μεταφορική ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Συνεπώς η μεταβολή της ορμής του βλήματος θα είναι:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_\tau - \vec{P}_a \to \Delta P = m\upsilon_{cm} - m\upsilon = -\frac{1}{2}m\upsilon$$



Στην (β) περίπτωση όμως, η δύναμη που ασκεί το βλήμα στη σανίδα κατά τη μικρή διάρκεια της κρούσης, παρουσιάζει ροπή ως προς το κέντρο το κέντρο μάζας της ράβδου, οπότε θα προκαλέσει **και** την περιστροφή της.

Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα εκτελεί σύνθετη κίνηση, που αποτελείται από μια μεταφορική κίνηση με τη ταχύτητα του κέντρου μάζας $\upsilon_{cm} = \frac{\upsilon}{2}$ και μια στροφική γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας Κ, του συσσωματώματος. Επειδή όμως η σανίδα και το βλήμα έχουν ίσες μάζες, το Κ θα βρίσκεται στο μέσον της απόστασης (ΟΑ). Εφαρμόζοντας της Α.Δ.Σ. για την κρούση, ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \to m\upsilon\frac{\ell}{4} = I\omega \to m\upsilon\frac{\ell}{4} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{16} + m\frac{\ell^2}{16}\right)\cdot\omega \to \omega = \frac{6\upsilon}{5\ell}$$

Αλλά τότε το βλήμα που θεωρείται υλικό σημείο, έχει ταχύτητα υ_{cm}, εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=\omega\cdot\frac{\ell}{4} = \frac{3}{10}\upsilon = 0{,}3\upsilon$ λόγω της στροφικής οι οποίες έχουν την ίδια διεύθυνση, συνεπώς η μεταβολή της ορμής του είναι: $\Delta\vec{P} = \vec{P}_\tau - \vec{P}_a \to \Delta P = m\upsilon_A - m\upsilon = m(\upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} - \upsilon) = -0{,}2m\upsilon$

Παρατήρηση:

Μπορούσε κάποιος να θεωρήσει ότι η στροφορμή διατηρείται ως προς νοητό **σταθερό** κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον Ο της ράβδου; Η απάντηση είναι **καταφατική**. Η στροφορμή ενός συστήματος διατηρείται ως προς οποιοδήποτε **σταθερό** άξονα, όταν δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές ως προς τον άξονα αυτό. Αρκεί να υπολογίσουμε σωστά την στροφορμή του συσσωματώματος ως προς τον νοητό σταθερό άξονα που περνά από το Ο. Πόση είναι αυτή;

$$L = I_{cm}\omega + m_{o\lambda}\upsilon_{cm}R\,,$$

όπου $I_{cm}\cdot\omega$ η στροφορμή λόγω της στροφικής κίνησης γύρω από το κέντρο μάζας του στερεού και $m_{o\lambda}\upsilon_{cm}R$ η στροφορμή λόγω της μεταφορικής, στην οποία το στερεό μπορεί να θεωρηθεί υλικό σημείο, που εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το Ο με τη ταχύτητα του κέντρου μάζας.

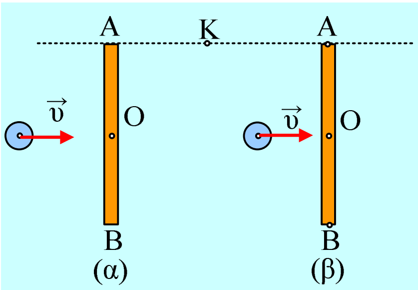
Ας δοκιμάσουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \to m\upsilon\frac{\ell}{2} = I_{cm}\omega + m_{o\lambda}\upsilon_{cm}R \to m\upsilon\frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{16} + m\frac{\ell^2}{16}\right)\cdot\omega + 2m\cdot\frac{\upsilon}{2}\cdot\frac{\ell}{4} \to \omega = \frac{6\upsilon}{5\ell}$$

Παρατηρούμε ότι υπολογίζουμε ξανά την ίδια τιμή γωνιακής ταχύτητας. Είναι καλή ιδέα να εφαρμόσουμε με αυτόν τον τρόπο την ΑΔΣ; Δεν θα το πρότεινα σε καμία περίπτωση!!!

Εφαρμογή 5:

Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη ηρεμούν δυο όμοιες σανίδες. Η πρώτη είναι ελεύθερη ενώ η δεύτερη μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το άκρο της Α. Δύο όμοιες σφαίρες κινούμενες οριζόντια κτυπούν τις ράβδους στο μέσον Ο κάθε ράβδου. Μετά την κρούση οι δυο σφαίρες έχουν μηδενικές ταχύτητες. Οι σανίδες και τα βλήματα έχουν ίσες μάζες m. Η ροπή αδράνειας μιας



ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της είναι $I = \frac{1}{12}m\ell^2$.

i) Ποια η ταχύτητα του μέσου Ο κάθε ράβδου, αμέσως μετά την κρούση.

ii) Να ερμηνευτεί το αποτέλεσμα.

iii) Να εξετάσετε αν μπορούμε να μελετήσουμε το αποτέλεσμα της κρούσης χρησιμοποιώντας την Α.Δ.Σ. ως προς νοητό σταθερό κατακόρυφο άξονα που να περνά:

α) από το σημείο Κ,

β) από το άκρο Β της ράβδου.

γ) Από το μέσον Ο της ράβδου.

Απάντηση:

i) Κατά την (α) κρούση η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή, αφού στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις (Η συνισταμένη του βάρους και της δύναμης στήριξης Ν είναι μηδενική).

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \rightarrow m\upsilon = m\cdot 0 + m\upsilon_{cm} \rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon$$

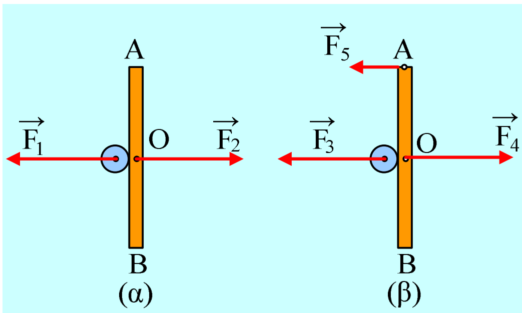
Δηλαδή η πρώτη ράβδος εκτελεί μεταφορική κίνηση με σταθερή ταχύτητα υ_{cm} (τριβές δεν υπάρχουν) ίση με την αρχική ταχύτητα της σφαίρας.

Στην περίπτωση (β), η ράβδος συνδέεται με άξονα, συνεπώς δεν γνωρίζουμε αν δέχεται η όχι δύναμη από τον άξονα z στη διάρκεια της κρούσης και αν αυτή η δύναμη είναι μικρή ή μεγάλη, ώστε να μπορούμε να την αγνοήσουμε. Ό,τι και να συμβαίνει όμως στο άκρο Α, η ροπή της ασκούμενης δύναμης ως προς τον άξονα z θα είναι μηδενική. Συνεπώς η στροφορμή κατά τον άξονα z παραμένει σταθερή.

$$\vec{L}_{\pi\rho} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m\upsilon\frac{\ell}{2} = m\cdot 0\cdot\frac{\ell}{2} + I_{cm}\omega \rightarrow m\upsilon\frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{12}m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4}\right)\cdot\omega \rightarrow m\upsilon\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2\omega \rightarrow$$

$$\omega = \frac{3\upsilon}{2\ell} \rightarrow \upsilon_{cm} = \upsilon_o = \frac{3\upsilon}{2\ell}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{3}{4}\upsilon$$

ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα στη διάρκεια της κρούσης (μεταβλητού μέτρου δυνάμεις), όπου F_1-F_2 και F_3-F_4 ζευγάρια δράσης-αντίδρασης, συνεπώς δυνάμεις ίσων μέτρων. Αν υποθέσουμε ότι οι κρούσεις έχουν την ίδια διάρκεια (για χάριν ευκολίας στη μελέτη μας), τότε F_1=F_3, αφού οι δυνάμεις αυτές μηδενίζουν την ορμή των σφαιρών. Αλλά τότε F_4=F_3=F_1=F_2 και αφού η ράβδος (β) απέκτησε μικρότερη ταχύτητα κέντρου μάζας, σημαίνει ότι δέχτηκε και δύναμη F_5 από τον άξονα αντίθετης φοράς από την F_4. Με άλλα λόγια η ράβδος στην (β) περίπτωση απέκτησε μικρότερη ορμή, επειδή δέχτηκε εξωτερική δύναμη από τον άξονα στη διάρκεια της κρούσης, αντίθετης κατεύθυνσης από την αρχική ορμή της σφαίρας.



Με βάση τα παραπάνω, γίνεται σαφές γιατί δεν μπορούμε να στηριχθούμε στην Α.Δ.Ο. για τον υπολογισμό της ταχύτητας της ράβδου, μετά την κρούση.

iii) Η στροφορμή ως προς τον νοητό κατακόρυφο άξονα που περνά από το Κ, διατηρείται και στις δύο περιπτώσεις. Στην (α) αφού δεν έχουμε εξωτερικές ροπές ως προς το Κ, αλλά και στη (β), αφού ο φορέας της δύναμης από τον άξονα περνά από το Κ (οπότε $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$). Πράγματι:

$$\text{Περίπτωση (α):}\quad \vec{L}_{\pi\rho}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow m\upsilon\frac{\ell}{2}=m\cdot 0\cdot\frac{\ell}{2}+m\upsilon_{cm}\frac{\ell}{2}\rightarrow \upsilon_{cm}=\upsilon$$

$$\text{Περίπτωση (β):}\quad \vec{L}_{\pi\rho}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow m\upsilon\frac{\ell}{2}=m\cdot 0\cdot\frac{\ell}{2}+I_{cm}\omega+m\upsilon_{cm}\frac{\ell}{2}\rightarrow$$

$$m\upsilon\frac{\ell}{2}=\frac{1}{12}m\ell^2\omega+m\omega\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\rightarrow\omega=\frac{3\upsilon}{2\ell}\rightarrow\upsilon_{cm}=\frac{3}{4}\upsilon$$

β) Πάμε τώρα στον νοητό κατακόρυφο άξονα που περνά από το άκρο Β.

Στην (α) περίπτωση η στροφορμή διατηρείται διότι δεν έχουμε εξωτερικές ροπές ως προς το Β:

$$\vec{L}_{\pi\rho}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow m\upsilon\frac{\ell}{2}=m\cdot 0\cdot\frac{\ell}{2}+m\upsilon_{cm}\frac{\ell}{2}\rightarrow \upsilon_{cm}=\upsilon$$

Στην (β) περίπτωση όμως ασκείται εξωτερική ροπή ως προς το Β και αυτή είναι η ροπή της δύναμης από τον άξονα, συνεπώς η στροφορμή δεν διατηρείται.

γ) Το ίδιο συμβαίνει και για την στροφορμή ως προς κατακόρυφο νοητό άξονα που περνά από το μέσον της ράβδου.

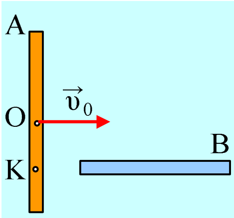
Στην (α) περίπτωση η στροφορμή διατηρείται διότι δεν ασκείται εξωτερική ροπή ως προς το Β,:

$$\vec{L}_{\pi\rho}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\rightarrow m\upsilon\cdot 0=m\cdot 0\cdot+m\upsilon_{cm}\cdot 0$$

Στην (β) περίπτωση όμως ασκείται εξωτερική ροπή ως προς το Β, οπότε:

$$L_{\pi\rho}=m\upsilon\cdot 0\ \text{ ενώ }\ L_{\tau\varepsilon\lambda}=I_{cm}\omega\neq 0$$

Εφαρμογή 6:



Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται μεταφορικά με σταθερή ταχύτητα υ_0=4m/s μια ομογενής ράβδος Α μάζας m=16kg, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή συγκρούεται με δεύτερη ράβδο Β μάζας m, η οποία έχει τη διεύθυνση της αρχικής ταχύτητας υ_0. Αν το σημείο σύγκρουσης Κ, απέχει κατά $x=\frac{\ell}{4}$ από το μέσον Ο της ράβδου και μετά την κρούση, η ράβδος Β αποκτά ταχύτητα κέντρου μάζας υ_2=3m/s, να βρεθεί η απώλεια της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I=\frac{1}{12}m\ell^2$.

Απάντηση:

Το σύστημα των δύο ράβδων είναι μονωμένο, συνεπώς η ορμή διατηρείται κατά την κρούση:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu}=\vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}\rightarrow m\upsilon_0=m\cdot\upsilon_1+m\upsilon_2\rightarrow\upsilon_1=\upsilon_0-\upsilon_2=1m/s$$

Αλλά και η στροφορμή του συστήματος διατηρείται αφού $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$ ως προς οποιοδήποτε άξονα κάθετο στο επίπεδο της κίνησης. Ως προς ποιο άξονα θα εφαρμόσουμε την διατήρηση αυτή; Ως προς όποιον μας βολεύει. Δεν υπάρχει πρόβλημα. Θεωρούμε λοιπόν ένα νοητό κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον Ο της Α ράβδου και έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho} = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow m\upsilon \cdot 0 = m \cdot \upsilon_2 \cdot \frac{\ell}{4} - I\omega_1 \rightarrow \frac{1}{12}m\ell^2\omega_1 = \frac{1}{4}m\ell\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\omega_1 = \frac{3\upsilon_2}{\ell}$$

Αλλά τότε η απώλεια της μηχανικής ενέργειας είναι:

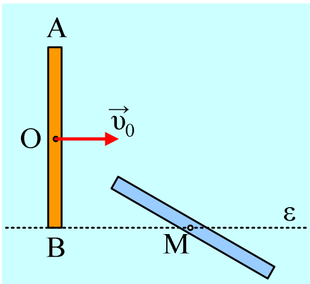
$$\Delta E = K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 \rightarrow$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{12}m\ell^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{24}m \cdot 9\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$$

και με αντικατάσταση ΔΕ=21J.

Εφαρμογή 7:

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_0=3,8m/s μια ομογενής ράβδος (α) μάζας m και μήκους 1m, χωρίς να στρέφεται, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή συγκρούεται με δεύτερη όμοια ράβδο (β), το μέσον Μ της οποίας βρίσκεται σε ευθεία ε, παράλληλης προς την ταχύτητα υ_0, η οποία περνά από το άκρο Β της πρώτης ράβδου. Αν μετά την κρούση, το κέντρο Ο της (α) έχει ταχύτητα της ίδιας διεύθυνσης με μέτρο υ_1=0,6m/s ενώ στρέφεται σύμφωνα με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού με ω_1=4,8rad/s:



i) Το κέντρο Μ της ράβδου (β) θα κινηθεί κατά μήκος της ευθείας ε ή όχι και γιατί;

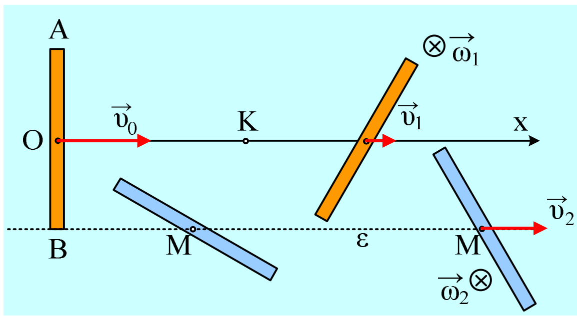
ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του Μ.

iii) Ποια η γωνιακή ταχύτητα της δεύτερης ράβδου (β);

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12}m\ell^2$.

Απάντηση:

i) Αφού το κέντρο μάζας Ο της ράβδου (α), συνεχίζει να κινείται με ταχύτητα ίδιας διεύθυνσης (ας την πούμε διεύθυνση x), σημαίνει ότι η δύναμη που δέχτηκε η ράβδος, κατά τη διάρκεια της κρούσης, είχε τη διεύθυνση x. Συνεπώς και η αντίδρασή της που ασκήθηκε στην (β) ράβδου, είχε επίσης την ίδια διεύθυνση, με αποτέλεσμα το κέντρο μάζας να αποκτήσει ταχύτητα παράλληλη της αρχικής ταχύτητας υ_0 και αφού αρχικά το Μ ήταν πάνω στην ευθεία ε, πάνω στην ίδια ευθεία θα κινηθεί. Βλέπε σχήμα.



ii) Η ορμή του συστήματος διατηρείται κατά την κρούση, αφού το σύστημα είναι μονωμένο:

$$\vec{P}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{P}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \rightarrow m\upsilon_0 = m \cdot \upsilon_1 + m\upsilon_2 \rightarrow \upsilon_2 = \upsilon_0 - \upsilon_1 = 3{,}2m/s$$

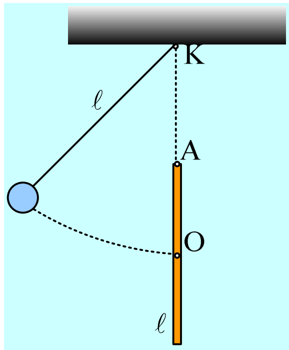
iii) Αλλά και η στροφορμή του συστήματος διατηρείται ως προς οποιονδήποτε άξονα, αφού $\Sigma F_{\varepsilon\xi}=0$, οπότε και $\Sigma\tau_{\varepsilon\xi}=0$. Ας επιλέξουμε έναν κατακόρυφο άξονα ο οποίος διέρχεται από κάποιο σημείο Κ της ευθείας x. Θα έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho,k}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda},k \to m\upsilon_0\cdot 0=-I_1\omega_1+m\cdot\upsilon_2\cdot\frac{\ell}{4}-I_{2M}\omega_2 \to \frac{1}{12}m\ell^2\omega_1+\frac{1}{12}m\ell\omega_2=m\upsilon_2\frac{\ell}{4}\to$$

$$\ell\omega_1+\ell\omega_2=3\upsilon_2\to\omega_2=\frac{3\upsilon_2}{\ell}-\omega_1=\frac{3\cdot 3{,}2}{1}r/s-4{,}8r/s=4{,}8r/s$$

Εφαρμογή 8:

Μια ομογενής ράβδος μάζας m και μήκους ℓ μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος περνά από το ένα της άκρο Α και ηρεμεί σε κατακόρυφη θέση. Από ένα σημείο Κ, το οποίο βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη που περνά από το Α, κρέμεται μια σφαίρα μάζας m μέσω νήματος μήκους επίσης ℓ. Εκτρέπουμε τη σφαίρα προς τα αριστερά, όπως στο σχήμα και την αφήνουμε να κινηθεί, οπότε φτάνει στην κατακόρυφη θέση με ταχύτητα υ=4m/s και συγκρούεται κτυπώντας την ράβδο στο μέσον της Ο. Μετά την κρούση, η σφαίρα ακινητοποιείται. Να βρεθεί η ταχύτητα του μέσου της ράβδου, αμέσως μετά την κρούση.



Για τη ράβδο ως προς τον άξονα περιστροφής της $I=\frac{1}{3}m\ell^2$.

Απάντηση.

Με βάση όλα τα προηγούμενα παραδείγματα, είναι νομίζω σαφές ότι η ορμή δεν διατηρείται κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Η στροφορμή όμως του συστήματος διατηρείται;

Ποια στροφορμή; Ως προς ποιον άξονα; Ως προς αυτόν γύρω από τον οποίο στρέφεται το νήμα, από το σημείο Κ ή ως προς τον άξονα γύρω από τον οποίο θα στραφεί η ράβδος από το άκρον της Α;

Το σύστημα σφαίρα – ράβδος δέχεται τις εξής εξωτερικές δυνάμεις: Τα δυο βάρη, την τάση του νήματος και την δύναμη από τον άξονα στο Α. Ως προς τον άξονα στο Α η συνολική ροπή είναι μηδενική, ως προς τον άξονα στο Κ, όχι, αφού η δύναμη του άξονα έχει ροπή ως προς το Κ. Κατά συνέπεια εφαρμόζουμε την Α.Δ.Σ. ως προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου και έχουμε:

$$\vec{L}_{\pi\rho}=\vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda}\to m\upsilon\cdot\frac{\ell}{2}=m\cdot 0\cdot\frac{\ell}{2}+I\omega\to\frac{1}{3}m\ell^2\omega=\frac{1}{2}m\ell\upsilon\to\omega=\frac{3\upsilon}{2\ell}$$

$$\text{Αλλά τότε } \upsilon_o=\omega\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{3\upsilon}{2\ell}\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{3}{4}\upsilon=3m/s$$

Γενικό Συμπέρασμα;

Όταν σ' ένα πρόβλημα που υπεισέρχεται κάποιο στερεό θέλουμε να εξετάσουμε αν διατηρείται η ορμή ή η στροφορμή, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στη περίπτωση που εμπλέκεται άξονας περιστροφής.

Αν ο άξονας είναι **ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ** τότε κατά κανόνα ασκεί δύναμη, οπότε η ορμή δεν διατηρείται (ή δεν ξέρουμε αν διατηρείται).

Αν θέλουμε να εξετάσουμε αν διατηρείται η στροφορμή, βολεύει ο **ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ** άξονας, διότι ως προς αυτόν η δύναμη που ασκεί έχει μηδενική ροπή.

Στην περίπτωση **ΝΟΗΤΟΥ** άξονα δεν έχουμε αντίστοιχο πρόβλημα, διότι αυτός δεν ασκεί δύναμη.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης