Η Κύλιση χωρίς (με) ολίσθηση και μια συνθήκη.

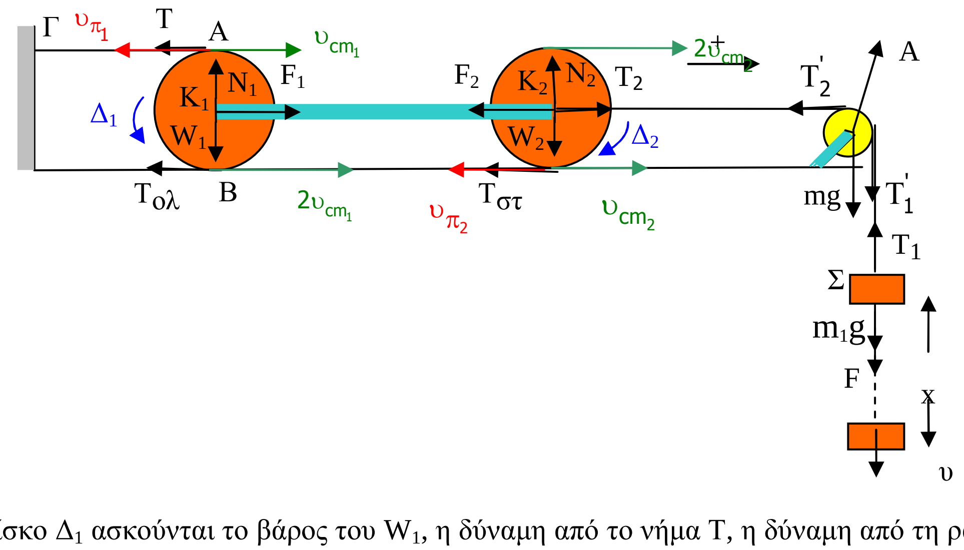
Ο Δίσκος $Δ_1$, μάζας M=2kg και ακτίνας R=0,2m , ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο τραπέζι με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5 και έχει στην περιφέρεια του τυλιγμένο αβαρές νήμα που έχει το ένα άκρο του ακλόνητα στερεωμένο στο σημείο Γ. Το νήμα μπορεί να ξετυλίγεται από το δίσκο $Δ_1$ χωρίς να ολισθαίνει. Το κέντρο μάζας K_1 του δίσκου $Δ_1$ συνδέεται με αβαρή ράβδο με το κέντρο K_2 ενός άλλου όμοιου δίσκου $Δ_2$ που έχει συνδεθεί μέσω αβαρούς νήματος με την περιφέρεια ακίνητης τροχαλίας μάζας m=1kg και ακτίνας r=0,1m. Στο άλλο άκρο του νήματος που δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία, έχει συνδεθεί και ισορροπεί σώμα Σ μάζας m_1=1kg. Κάποια στιγμή ασκούμε στο σώμα κατακόρυφη δύναμη μέτρου F=25N με φορά προς τα κάτω. Εάν ο δίσκος $Δ_2$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει να υπολογιστούν τα μέτρα:

A_1. Της επιτάχυνσης των κέντρων μάζας K_1 και K_2 των δύο δίσκων.

A_2. Της γωνιακής επιτάχυνσης $α_{γων}$ της τροχαλίας.

A_3. Της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής $ω_2$ του δίσκου $Δ_2$ και της ταχύτητας $υ_B$ του σημείου επαφής B του Δίσκου $Δ_1$ με το τραπέζι όταν το σώμα Σ έχει κατέλθει κατά x=1m. Οι ροπές αδρανείας των δίσκων $Δ_1$, $Δ_2$ και της τροχαλίας ως προς τους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας τους και είναι κάθετοι στο επίπεδο τους, είναι αντίστοιχα: $I_{(K_1)} = I_{(K_2)} = \frac{1}{2}MR^2$ και $I_K = \frac{1}{2}mr^2$. Δίνεται ότι $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



A_1. Στο δίσκο $Δ_1$ ασκούνται το βάρος του W_1, η δύναμη από το νήμα T, η δύναμη από τη ράβδο F_1, η κάθετη αντίδραση N_1 από το τραπέζι και η τριβή ολίσθησης $T_{ολ}$. Στο δίσκο $Δ_2$ το βάρος του W_2, η δύναμη από το νήμα T_2, η δύναμη από τη ράβδο F_2, η κάθετη αντίδραση N_2 από το τραπέζι και η στατική τριβή $T_{στ}$.
Στην τροχαλία ασκούνται το βάρος της mg, η αντίδραση A και οι δυνάμεις T'_1 και T'_2 από τα νήματα.
Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος του mg, η δύναμη από το νήμα T_1 και η δύναμη F. Επειδή τα νήματα και η ράβδος είναι αβαρή: $T_1 = T'_1$ (1), $T_2 = T'_2$ (2) και $F_1 = F_2$ (3). Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τρο-

χαλία: $\upsilon = \upsilon_{\varepsilon_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma}} = \upsilon_{cm_2} \Rightarrow \frac{d\upsilon_1}{dt} = \frac{d\upsilon_{\varepsilon_{\tau\rho o\chi\alpha\lambda\acute{\iota}\alpha\varsigma}}}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm_2}}{dt} \Rightarrow$ $a_1 = a_\varepsilon = a_{cm_2}$ (4) και $a_\varepsilon = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r = a_{cm_2}$ (5)

όπου a_ε = η επιτάχυνση των σημείων της περιφέρειας λόγω της στροφικής κίνησης της τροχαλίας, $\alpha_{\gamma\omega\nu}$= η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας, a_1= η επιτάχυνση του σώματος Σ και a_{cm_2} = η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του δίσκου Δ_2.

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (Θ.Ν.Μ.) για την κίνηση του σώματος Σ:

$$F + m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \overset{(4)}{\Rightarrow} F + m_1 g - T_1 = m_1 a_{cm_2} \quad (6).$$

Από το Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας: $T_1' r - T_2' r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \overset{(5)}{\Rightarrow} T_1' - T_2' = \frac{1}{2} m a_{cm_2} \quad (7).$

Ο Δίσκος Δ_2 εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Από το Θ.Ν.Μ. για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου Δ_2:

$$T_2 - F_2 - T_{\sigma\tau} = M a_{cm_2} \quad (8).$$

Από το Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση του δίσκου Δ_2: $T_{\sigma\tau} \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu_2}$, αλλά $a_{cm_2} = \alpha_{\gamma\omega\nu_2} R$ και

τελικά $T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} M a_{cm_2} \quad (9)$. Για το Δίσκο Δ_1 έχουμε ότι: $\upsilon_\Gamma = \upsilon_A = 0$ δηλαδή για το σημείο Α ισχύει:

$\upsilon_{cm_1} = \upsilon_{\pi_1} = \omega_1 R \quad (10)$ και το σημείο Β: $\upsilon_B = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\pi_1} \overset{(10)}{\Rightarrow} \upsilon_B = 2\upsilon_{cm_1} \quad (11)$, όπου υ_{π_1} =η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του δίσκου Δ_1 λόγω στροφικής κίνησης.

$$\text{Από } (10): \frac{d\,\upsilon_{cm_1}}{dt} = \frac{d\,\upsilon_{\pi_1}}{dt} = \frac{d\,\omega_1}{dt} R \Rightarrow a_{cm_1} = a_{\varepsilon_1} = \alpha_{\gamma\omega\nu_1} R \quad (12).$$

Από το Θ.Ν.Μ. για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου Δ_1: $F_1 - T_{o\lambda} - T = M a_{cm_1} \quad (13)$.

Από το Θ.Ν.Μ. για τη στροφική κίνηση του δίσκου Δ_1:

$$TR - T_{o\lambda} \cdot R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu_1} \overset{(12)}{\Rightarrow} T - T_{o\lambda} = \frac{1}{2} M a_{cm_1} \quad (14).$$

Αθροίζουμε κατά μέλη τις (6), (7), (8), (9), (13),(14):

$$F + m_1 g - T_1 + T_1' - T_2' + T_2 - F_2 - T_{\sigma\tau} + T_{\sigma\tau} + F_1 - T_{o\lambda} - T + T - T_{o\lambda} =$$
$$= m_1 a_{cm_2} + \frac{1}{2} m a_{cm_2} + M a_{cm_2} + \frac{1}{2} M a_{cm_2} + M a_{cm_1} + \frac{1}{2} M a_{cm_1}$$
$$\overset{(1),(2),(3)}{\Rightarrow} F + m_1 g - 2T_{o\lambda} = m_1 a_{cm_2} + \frac{1}{2} m a_{cm_2} + \frac{3}{2} M a_{cm_2} + \frac{3}{2} M a_{cm_1} \quad (15).$$

Τα κέντρα μάζας K_1 και K_2 των δίσκων κινούνται με την ίδια επιτάχυνση καθώς αποτελούν και άκρα της αβαρούς ράβδου, άρα $a_{cm_1} = a_{cm_2}$ (16) και $T_{ολ} = \mu N_2 \overset{N_2 = W_2}{\Rightarrow} T_{ολ} = \mu Mg$ (17). Από

$$(15) \overset{(16),(17)}{\Rightarrow} a_{cm_1} = \frac{F + m_1 g - 2\mu Mg}{\frac{1}{2}m + m_1 + 3M} \Rightarrow a_{cm_1} = 2cm / s^2.$$ Άρα

$$a_{cm_1} = a_{cm_2} = 2m / s^2 \quad (18)$$

Α₂. Από $(5) \Rightarrow \alpha_{γων} = \dfrac{a_{cm_2}}{r} \overset{(18)}{\Rightarrow} \alpha_{γων} = 20rad / s^2$.

Α₃. Για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του σώματος Σ: $\upsilon = a_1 t$ (19) και $x = \frac{1}{2}a_1 t^2$ (20). Από

$$(19) \text{ και } (20): \upsilon = \sqrt{2a_1 x} \overset{(4),(18)}{\Rightarrow} \upsilon = 2m / s \quad (21).$$

Αλλά $\upsilon = \upsilon_{ε_{τροχαλίας}} = \upsilon_{cm_2} \Rightarrow \upsilon = \upsilon_{cm_2}$ (22), όπου $\upsilon_{ε_{τροχαλίας}}$ = η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας λόγω στροφικής κίνησης. Ο δίσκος $Δ_2$ εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση άρα $\upsilon_{cm_2} = \upsilon_{\pi_2}$ (23) , όπου υ_{π_2} = η ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του δίσκου $Δ_2$ λόγω της στροφικής κίνησης.

$$\text{Από (22) και (23): } \upsilon = \upsilon_{\pi_2} \Rightarrow \upsilon = \omega_2 \cdot R \Rightarrow \omega_2 = \frac{\upsilon}{R} \Rightarrow \omega_2 = 10rad / s.$$

Επειδή $\upsilon_{cm_1} = \upsilon_{cm_2} \overset{(22)}{\Rightarrow} \upsilon_{cm_1} = \upsilon \overset{(21)}{\Rightarrow} \upsilon_{cm_1} = 2m / s$ (24). Από $(11) \overset{(24)}{\Rightarrow} \upsilon_B = 4m / s$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Η συνθήκη $\upsilon_{cm} = \upsilon_{\pi} = \omega R$ αποτελεί την **ικανή και αναγκαία συνθήκη** για να εκτελεί ένα σώμα κύλιση χωρίς ολίσθηση όταν ικανοποιείται αποκλειστικά από τις αντιθέτου φοράς ταχύτητες του σημείου (ή των σημείων) επαφής του σώματος με το επίπεδο κύλισης.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Ξ.Στεργιάδης