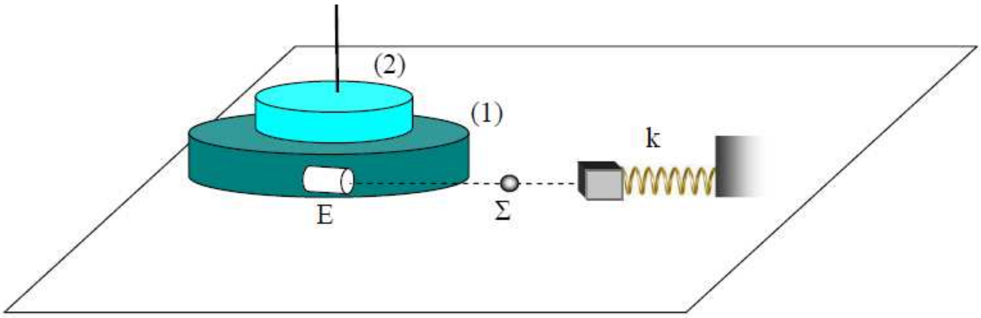
Δυο τροχοί περιστρέφονται μετά από εκτόξευση βλήματος



Οι δυο τροχοί (1) και (2) του σχήματος με μάζες $M_1 = M_2 =$ 2kg και ακτίνες $R_1 = 0{,}4m$, $R_2 = 0{,}2$ m αντίστοιχα, έχουν τραχιές επιφάνειες , και είναι τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλο, έτσι ώστε να μπορούν να στρέφονται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδό τους και διέρχεται από το κέντρο μάζας τους. Το σύστημα ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.

Στην περιφέρεια το τροχού (1), είναι προσαρμοσμένος ένας εκτοξευτήρας Ε αμελητέας μάζας, από τον οποίο κάποια χρονική στιγμή, εκτοξεύεται οριζόντια στην διεύθυνση της εφαπτομένης στον τροχό (1), ένα σφαιρίδιο Σ αμελητέων διαστάσεων, μάζας m = 0,2kg . Το σφαιρίδιο αυτό, συναντά μετά την εκτόξευσή του ένα κύβο μάζας M = 0,8kg που ηρεμεί πάνω στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο, και σφηνώνεται σ' αυτόν μετωπικά κι ακαριαία.

Ο κύβος, είναι δεμένος στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k = 100N/m που έχει το άλλο του άκρο ακλόνητο, και τον άξονά του στη διεύθυνση της κίνησης του σφαιριδίου.

Το συσσωμάτωμα σφαιρίδιο – κύβος εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς D =k=100N/m και πλάτους A = 0,4m .

Αν το 20% της ενέργειας που δαπανήθηκε για την εκτόξευση του σφαιριδίου μετατράπηκε σε άλλες μορφές ενέργειας εκτός από μηχανική, μέσα στον εκτοξευτήρα, να υπολογίσετε:

i) Την ταχύτητα του σφαιριδίου λίγο πριν την κρούση του με τον κύβο.

ii) Την τελική γωνιακή ταχύτητα που αποκτά το σύστημα των δυο τροχών.

iii) Την ενέργεια που δαπανήθηκε για την εκτόξευση του σφαιριδίου.

iv) Το ποσοστό επί τοις εκατό της ενέργειας που δαπανήθηκε για την εκτόξευση που μετατράπηκε

 α. σε θερμότητα λόγω τριβών ανάμεσα στους τροχούς μέχρι οι αυτοί να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα και

 β. σε ενέργεια ταλάντωσης του συστήματος σφαιρίδιο-κύβος.

Δίνεται ότι δεν υπάρχουν τριβές στον άξονα περιστροφής, και ότι η ροπή αδράνειας τροχού μάζας M και ακτίνας R , ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Απάντηση

i) Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση σφαιριδίου – κύβου έχουμε ότι

$$m\vec{\upsilon}_o = (m+M)\vec{V} \text{ ή } m\upsilon_o = (m+M)V \text{ ή } \upsilon_o = \frac{m+M}{m}V \quad (1)$$

Επειδή ο κύβος ηρεμεί και το επίπεδο είναι οριζόντιο και λείο, το ελατήριο τη στιγμή που αρχίζει η ταλάντωση, είναι στο φυσικό του μήκος που είναι και θέση ισορροπίας του συσσωματώματος. Αυτό σημαίνει ότι , η ταχύτητα του συσσωματώματος ακριβώς μετά την κρούση, είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης δηλαδή

$$V = ωA \text{ ή } V = \sqrt{\frac{k}{m+M}}\cdot A = 4\text{m/s} \ (2)$$

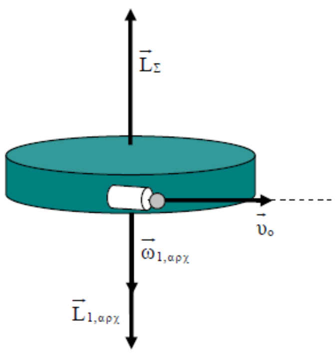
Από (1) και (2) προκύπτει ότι $υ_o$ = 20m/s (2)

ii) Κατά την έκρηξη , οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων ως προς τον άξονα περιστροφής είναι ίσες με μηδέν. Αμέσως μετά την έκρηξη, ο τροχός (1) στον οποίο είναι ενσωματωμένος ο εκτοξευτήρας , θα τεθεί πρώτος σε περιστροφή, λόγω της ροπής που δέχεται από τον εκτοξευτήρα, και στη συνέχεια μέσω της τριβής θα παρασύρει σε κίνηση και τον τροχό (2). Όμως οι τριβές μεταξύ των τροχών είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημά τους, άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα σφαιρίδιο – εκτοξευτήρας – τροχοί από την στιγμή λίγο πριν την έκρηξη μέχρι οι τροχοί να αποκτήσουν κοινή γωνιακή ταχύτητα. Δηλαδή

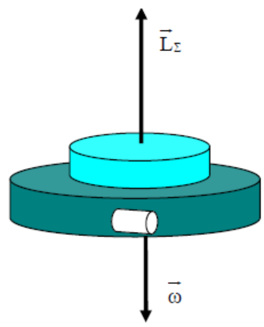
$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_Σ + \vec{L}_E + \vec{L}_{1,τελ} + \vec{L}_{2,τελ} \text{ ή } \vec{0} = \vec{L}_Σ + \vec{0} + \vec{L}_{1,τελ} + \vec{L}_{2,τελ} \text{ ή } \vec{L}_Σ + \vec{L}_{1,τελ} + \vec{L}_{2,τελ} = \vec{0} \text{ ή}$$

$$\vec{L}_Σ = -(\vec{L}_{1,τελ} + \vec{L}_{2,τελ}) \text{ ή } mυ_oR_1 = \left(\frac{1}{2}M_1R_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2\right)ω \text{ ή } ω = \frac{mυ_oR_1}{\frac{1}{2}MR_1^2 + \frac{1}{2}M_2R_2^2}$$

και με βάση τη (2) και τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι η τελική γωνιακή ταχύτητα των δυο τροχών έχει μέτρο ω= 8rad/s (3). Η διεύθυνσή της είναι η διεύθυνση του άξονα περιστροφής και η φορά της κατακόρυφα προς τα κάτω, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

iii) Με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα τροχός(1) -εκτοξευτήρας- σφαιρίδιο λίγο πριν και ακριβώς μετά την έκρηξη – σχήμα 1-, έχουμε ότι:

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_Σ + \vec{L}_E + \vec{L}_{1.αρχ} \text{ ή } \vec{0} = \vec{L}_Σ + \vec{0} + \vec{L}_{1.αρχ} \text{ ή } \vec{L}_Σ = -\vec{L}_{1.αρχ} \text{ ή } L_Σ = L_{1,αρχ} \text{ ή}$$

$$mυ_oR_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2ω_1 \text{ ή } ω_{1,αρχ} = \frac{2mυ_o}{M_1R_1}$$

και με βάση την (2) και τα δεδομένα $ω_{1,αρχ}$= 10rad/s (5)

Η ενέργεια λοιπόν που δαπανάται κατά έκρηξη είναι

$$E_{\delta\alpha\pi}=\frac{20}{100}E_{\delta\alpha\pi}+\frac{1}{2}m\upsilon_o^2+\frac{1}{2}I_1\omega_{1,\alpha\rho\chi}^2 \text{ ή } 0,8E_{\delta\alpha\pi}=\frac{1}{2}m\upsilon_o^2+\frac{1}{2}I_1\omega_{1,\alpha\rho\chi}^2 \ (4),$$

όπου $\frac{1}{2}I_1\omega_{1,\alpha\rho\chi}^2$ η κινητική ενέργεια του τροχού (1) αμέσως μετά την έκρηξη,

Από την (4) με βάση τις (2) και (5) προκύπτει ότι η ενέργεια που δαπανήθηκε για την εκτόξευση του σφαιριδίου είναι $E_{\delta\alpha\pi}$ = 60 j (6)

iv) α. $$\pi_1=\frac{\frac{1}{2}I_1\omega_{1,\alpha\rho\chi}^2-\frac{1}{2}(I_1+I_2)\omega^2}{E_{\delta\alpha\pi}}\cdot 100\%=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M_1R_1^2\omega_{1,\alpha\rho\chi}^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_1R_1^2+\frac{1}{2}M_2R_2^2\right)\omega^2}{E_{\delta\alpha\pi}}$$

και με βάση τις (3), (5), (6) προκύπτει $\pi_1=\frac{8}{3}\%$

β. $$\pi_2=\frac{\frac{1}{2}kA^2}{E_{\delta\alpha\pi}}100\%=\frac{40}{3}\% \ .$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης