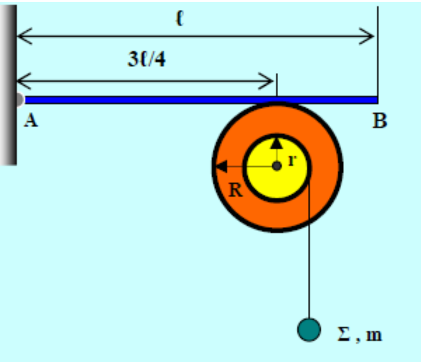
Δοκός – τροχός – σφαιρίδιο



Κατασκευάζουμε ένα τροχό ενώνοντας τις βάσεις δύο ομογενών κυλίνδρων, έτσι ώστε να αποκτήσουν κοινό άξονα όπως δείχνει το σχήμα.

Ο μεγάλος κύλινδρος έχει ακτίνα R = 0,4 m και ο μικρός r = 0,2 m. Ο τροχός μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, που ταυτίζεται με τον κοινό γεωμετρικό άξονα των κυλίνδρων. Η ροπή αδράνειας του συστήματος των ενωμένων κυλίνδρων ως προς τον άξονα αυτό, είναι $I = 0{,}8\ kgm^2$.

Γύρω από τον μικρότερο κύλινδρο , είναι τυλιγμένο ένα αβαρές σχοινί, στο κάτω άκρο του οποίου είναι δεμένο ένα σφαιρίδιο Σ μάζας m = 7, 5 kg.

Μια ομογενής δοκός ΑΒ που το βάρος της έχει μέτρο w = 150 N, στηρίζεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο, και εφάπτεται στον μεγάλο κύλινδρο σε απόσταση d = 3ℓ/4 από τη άρθρωση.

Το νήμα, δεν γλιστρά κατά την περιστροφή του συστήματος. Αρχικά συγκρατούμε τον τροχό ακίνητο, και τη χρονική στιγμή t = 0 τον αφήνουμε ελεύθερο, οπότε αρχίζει το νήμα να ξετυλίγεται.

Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του τροχού και της δοκού είναι μ = 0,1 και $g = 10 m/s^2$ να υπολογίσετε:

i) Την δύναμη της τριβής που ασκείται στη δοκό και να τη σχεδιάσετε πάνω στο σχήμα.
ii) Τη γωνιακή επιτάχυνση του τροχού.
iii) Την ταχύτητα του σώματος Σ την χρονική στιγμή t = 2 s.
iv) Τον ρυθμό μεταβολής της στοφορμής του τροχού.
v) Τον ρυθμό παραγωγής έργου πάνω στο τροχό την χρονική στιγμή t = 2 s.
vi) Τον ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του τροχού την ίδια χρονική στιγμή.
vii) Τον ρυθμό που παράγεται θερμότητα στο σημείο επαφής τροχού – δοκού , τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του σώματος Σ έχει μέτρο υ = 4 m/s.

Απάντηση

i) Η δοκός ΑΒ ισορροπεί σε οριζόντια θέση άρα $\Sigma\tau_A = 0$ ή $F_A \cdot 0 + N \cdot \frac{3\ell}{4} - W\frac{\ell}{2} = 0$ ή

$N = \frac{2W}{3} = 100N$ και επειδή η τριβή είναι $T = \mu N$, προκύπτει $T = 10N$ (1) .

Η τριβή πάνω στη δοκό φαίνεται στο σχήμα.

ii) Είναι $\Sigma\tau_{(o)} = I \cdot \alpha_\gamma$ ή $F' \cdot r - T'R = I \cdot \alpha_\gamma$ όμως $T' = T$ (δράση - αντίδραση), και $F' = F$ άρα

$$F \cdot r - TR = I \cdot \alpha_\gamma \ (2) .$$

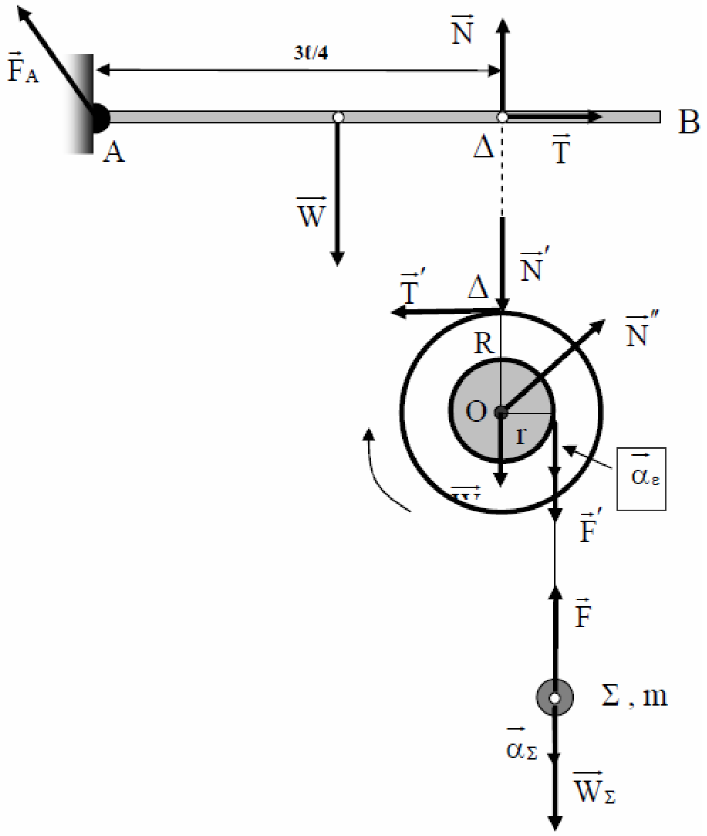
Για την κίνηση του σώματος Σ ισχύει ότι $W_\Sigma - F = m\alpha_\Sigma$ (3) και επειδή το νήμα δεν γλιστρά

$$\alpha_\varepsilon = \alpha_\Sigma \text{ ή } \frac{d}{dt}(\omega r) = \alpha_\Sigma \text{ ή } \alpha_\gamma r = \alpha_\Sigma \quad (4)$$

Έτσι η (3) με βάση την (4) γράφεται $W_\Sigma - F = m\alpha_\gamma r$ ή $F = mg - m\alpha_\gamma r$ (5).

Από το σύστημα των (2) και (5) έχουμε :

$$(mg - m\alpha_\gamma r)\cdot r - TR = I\cdot\alpha_\gamma \text{ ή } \alpha_\gamma = \frac{mgr - TR}{mr^2 + I} = 10\,rad/s^2 \quad (6).$$



iii) Είναι $\upsilon = \alpha_\Sigma t$ η οποία με βάση την (4) γράφεται $\upsilon = \alpha_\gamma \cdot r\cdot t$ άρα $\upsilon = 4m/s$ (7).

iv) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού έχει μέτρο $\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau_{(O)}$ ή $\frac{dL}{dt} = I\cdot\alpha_\gamma$ και με βάση την (6) και τα δεδομένα $\frac{dL}{dt} = 8Kgm^2/s^2$ και κατεύθυνση $\frac{d\vec{L}}{dt}\otimes$.

v) Ο ρυθμός παραγωγής έργου πάνω στον τροχό , δηλαδή ο ρυθμός που προσφέρεται ενέργεια σ' αυτόν είναι $\frac{dW}{dt} = \frac{dW_{F'}}{dt} = F'\cdot r\cdot\omega = F'\cdot r\cdot\alpha_\gamma t$ η οποία με βάση την (5) γράφεται:

$$\frac{dW_{F'}}{dt} = (mg - m\alpha_\gamma r)\cdot r\cdot\alpha_\gamma t$$

και με βάση την (6) και τα δεδομένα προκύπτει $\dfrac{dW_{F'}}{dt} = 240\,j/s$.

vi) Η κινητική ενέργεια του τροχού είναι $K_{τροχ} = \dfrac{1}{2} I\omega^2$ και ο ρυθμός μεταβολής της:

$$\frac{dK_{τροχ}}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{2} I \frac{d\omega}{dt}\omega \;\; ή \;\; \frac{dK_{τροχ}}{dt} = I\alpha_\gamma \omega \;\; ή$$

$$\frac{dK_{τροχ}}{dt} = \Sigma\tau_{(O)} \cdot \omega \;\; ή \;\; \frac{dK_{τροχ}}{dt} = I \cdot \alpha_\gamma \cdot \omega \;\; ή \;\; \frac{dK_{τροχ}}{dt} = I \cdot \alpha_\gamma \cdot \alpha_\gamma \cdot t = I \cdot \alpha_\gamma^2 \cdot t$$

και με βάση την (6) και τα δεδομένα $\dfrac{dK_{τροχ}}{dt} = 160\,j/s$

vii) Ο ρυθμός που παράγεται θερμότητα στο σημείο επαφής τροχού – δοκού είναι:

$$\frac{dQ}{dt} = T'R\omega \;\; ή \;\; \frac{dQ}{dt} = TR\omega \;\; (\text{επειδή } T' = T)$$

Όμως επειδή δεν γλιστρά το σχοινί , η ταχύτητα του σώματος Σ είναι έχει το ίδιο μέτρο με την επιτρόχια ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του μικρού κυλίνδρου δηλαδή $\upsilon = \omega r$ ή $\omega = \dfrac{\upsilon}{r}$ άρα

$\dfrac{dQ}{dt} = TR\dfrac{\upsilon}{r}$ και με βάση την (1) και τα δεδομένα προκύπτει $\dfrac{dQ}{dt} = 80\,j/s$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους….

Επιμέλεια

Μανώλης Δρακάκης