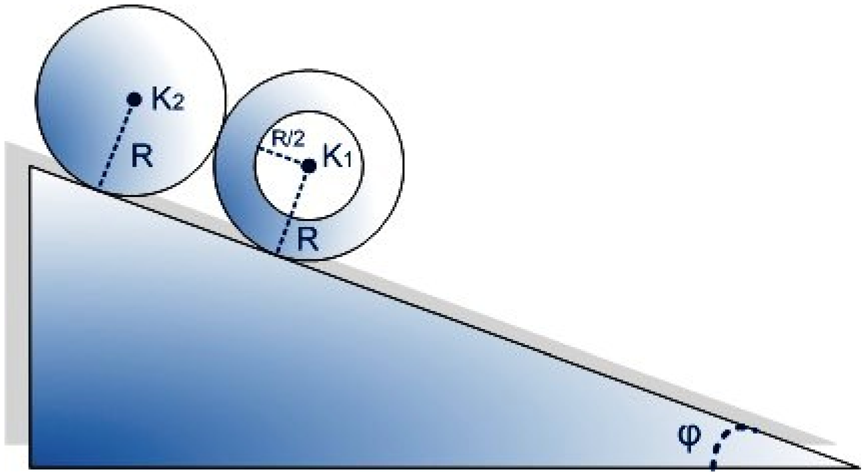
Δύο Σφαίρες σε Επαφή

Δύο σφαίρες ίδιας ακτίνας R και ίδιας πυκνότητας ρ, συγκρατούνται σε ισορροπία επί κεκλιμένου επιπέδου γωνίας φ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα δύο σώματα των οποίων οι επιφάνειες είναι λείες, βρίσκονται αρχικά σε επαφή. Η άνω σφαίρα είναι πλήρης και έχει μάζα m2 ενώ η κάτω είναι κοίλη με εσωτερική ακτίνα R/2.



Αν την χρονική στιγμή t = 0 αφήνουμε ταυτόχρονα ελεύθερες τις δυο σφαίρες και κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν:

1. να προσδιορίστε την ροπή αδράνειας της κοίλης σφαίρας.
2. να δείξετε ότι βρίσκονται διαρκώς σε επαφή.
3. να προσδιορίσετε την κοινή τους επιτάχυνση.
4. να προσδιορίσετε τη μεταξύ τους δύναμη.
5. να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής (μ)

Δίνονται: $I_{C(\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma)} = \frac{2}{5}MR^2$, g

Απάντηση:

Ερώτημα 1:

- **Υπολογισμός μάζας κοίλης σφαίρας**

Έστω m_3: η μάζα μίας συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R/2. Η μάζα είναι προσθετικό μέγεθος. Οπότε:

$$m_1 = m_2 - m_3$$

$$m_2 = m_1 + m_3 \Rightarrow \left\{ \begin{Bmatrix} \rho = \dfrac{m_2}{V_2} \\ \\ \rho = \dfrac{m_3}{V_3} \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{m_2}{V_2} = \frac{m_3}{V_3} \Rightarrow m_2 \cdot V_3 = m_3 \cdot V_2 \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = m_2 - m_3 \\ m_2 \cdot \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = m_3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = m_2 - m_3 \\ \mathbf{m_3 = \frac{m_2}{8}\ (1)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = m_2 - \frac{m_2}{8} \Rightarrow \mathbf{m_1 = \frac{7}{8} m_2\ (2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{m_2 = \frac{8}{7} m_1 (3)}$$

- **Υπολογισμός ροπής κοίλης σφαίρας**

I_1: η ροπή αδράνειας της κοίλης σφαίρας εσωτερικής ακτίνας R/2 και εξωτερικής R.

I_2: η ροπή αδράνειας μιας συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R.

I_3: η ροπή αδράνειας μίας συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R/2.

Επίσης και η ροπή αδράνειας είναι προσθετικό μέγεθος. Συνεπώς

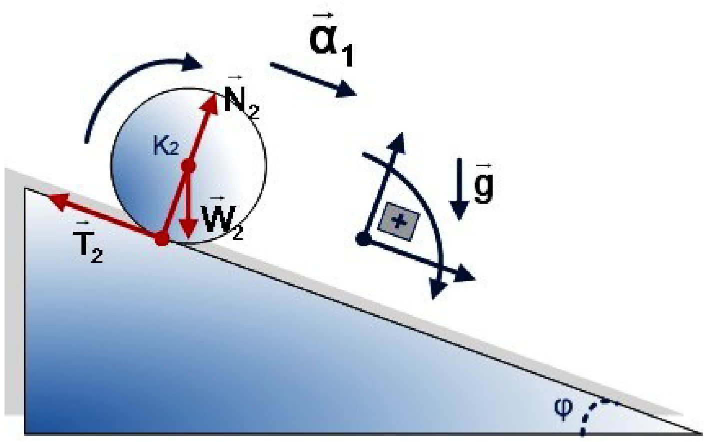
$$I_2 = I_1 + I_3 \Rightarrow \begin{cases} I_1 = I_2 - I_3 \\ I_2 = \frac{2}{5} m_2 R^2 \\ I_3 = \frac{2}{5} m_3 \left(\frac{R}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow I_1 = \frac{2}{5} m_2 R^2 - \frac{1}{10} m_3 R^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

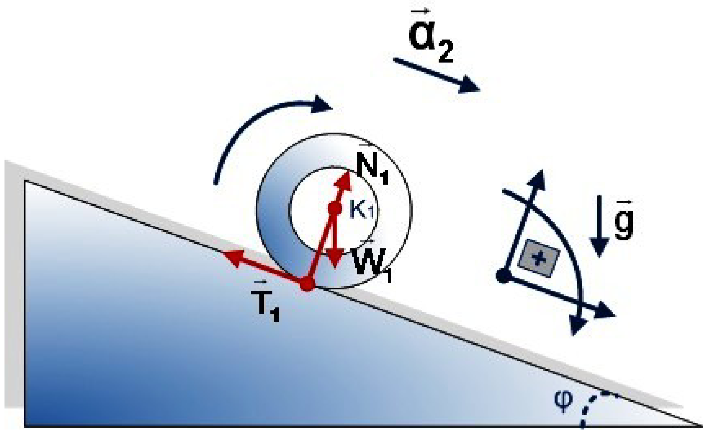
$$\Rightarrow I_1 = \frac{2}{5} m_2 R^2 - \frac{1}{10}\frac{m_2}{8} R^2 \Rightarrow I_1 = \frac{2}{5} m_2 R^2 - \frac{1}{80} m_2 R^2 \Rightarrow I_1 = \frac{31}{80} m_2 R^2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{31}{80} \cdot \frac{8}{7} \cdot m_1 R^2 \Rightarrow \mathbf{I_1 = \frac{31}{70} m_1 R^2\ (4)}$$

__Ερώτημα 2:__

Για να δείξουμε ότι οι δύο σφαίρες κατά τη κύλιση τους (χωρίς ολίσθηση) βρίσκονται συνεχώς σε επαφή, αρκεί να συγκρίνουμε τις επιταχύνσεις που θα αποκτούσαν, αν κυλούσαν μόνες τους στο κεκλιμένο επίπεδο υπό την επίδραση του βάρους τους.





- **Υπολογισμός επιτάχυνσης (α_1) - κοίλη σφαίρα (K_1)**

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη συμπαγή σφαίρα είναι οι εξής: το βάρος της $\mathbf{W_1}$, η κάθετη αντίδραση $\mathbf{N_1}$ από το κεκλιμένο επίπεδο και η στατική τριβή $\mathbf{T_1}$, η οποία έχει φορά προς τα πίσω (δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εξαρχής τη φορά της). Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau_1} = I_1 \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.(1)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow N_1 \cdot 0 + W_1 \cdot 0 + T_1 \cdot R = I_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(1)} \Longrightarrow T_1 \cdot R = I_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(1)} \overset{(4)}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow T_1 \cdot R = \frac{31}{70} m_1 R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(1)} \Longrightarrow \mathbf{T_1 = \frac{31}{70} m_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(1)} \cdot R \ (6)}$$

Επιπλέον η κοίλη σφαίρα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Άρα:

$$\mathbf{\alpha_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu.(1)} \cdot R \ \ (7)}$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (5),(6) και (7) έχουμε:

$$m_1 g\eta\mu\varphi - \frac{31}{70} m_1 \alpha_1 = m_1 \alpha_1 \Longrightarrow m_1 g\eta\mu\varphi = \frac{101}{70} m_1 \alpha_1 \Longrightarrow \boxed{\mathbf{\alpha_1 = \frac{70}{101} g\eta\mu\varphi \ (8)}}$$

- **Υπολογισμός επιτάχυνσης (α_2) - συμπαγή σφαίρα (K_2)**

Οι δυνάμεις που ασκούνται στη συμπαγή σφαίρα είναι οι εξής: το βάρος της $\mathbf{W_2}$, η κάθετη αντίδραση $\mathbf{N_2}$ από το κεκλιμένο επίπεδο και η στατική τριβή $\mathbf{T_2}$, η οποία έχει φορά προς τα πίσω (δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εξαρχής τη φορά της). Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\Sigma F_{2x} = m_2 \cdot \alpha_2 \Longrightarrow W_{2x} - T_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \mathbf{m_2 g\eta\mu\varphi - T_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \ \ (9)}$$

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau_2} = I_2 \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.(2)} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 \cdot 0 + W_2 \cdot 0 + T_2 \cdot R = I_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(2)} \Rightarrow T_2 \cdot R = I_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(2)} \xRightarrow{I_2=\frac{2}{5}m_2R^2}$$

$$\Rightarrow T_2 \cdot R = \frac{2}{5}m_2R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(2)} \Rightarrow \mathbf{T_2 = \frac{2}{5}m_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.(2)} \cdot R\ (10)}$$

Επιπλέον η συμπαγής σφαίρα εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση. Άρα:

$$\mathbf{\alpha_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu.(2)} \cdot R\ \ (11)}$$

Με συνδυασμό των σχέσεων (9),(10) και (11) έχουμε:

$$m_2 g\eta\mu\varphi - \frac{2}{5}m_2\alpha_2 = m_2\alpha_2 \Rightarrow m_2 g\eta\mu\varphi = \frac{7}{5}m_2\alpha_2 \Rightarrow \boxed{\mathbf{\alpha_2 = \frac{5}{7}g\eta\mu\varphi\ (12)}}$$

Με την διαίρεση των σχέσεων (8) και (12) προκύπτει:

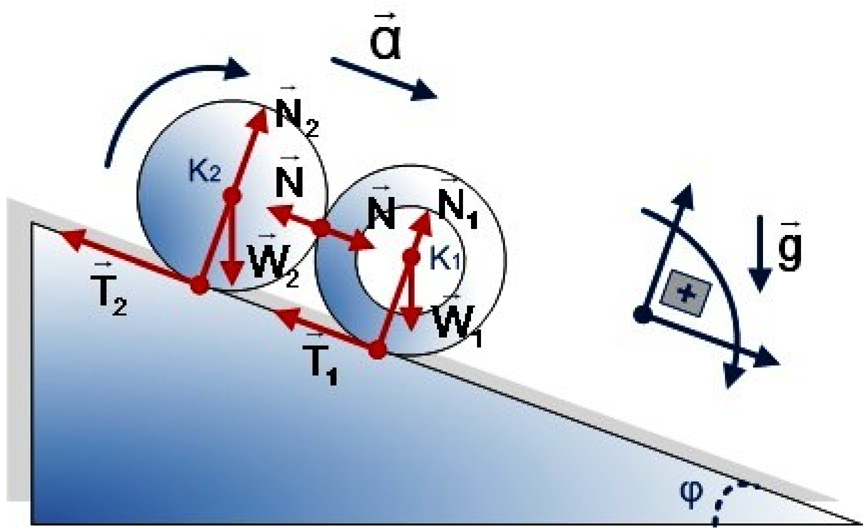
$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\frac{70}{101}g\eta\mu\varphi}{\frac{5}{7}g\eta\mu\varphi} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{490}{505} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < 1 \Rightarrow \boxed{\mathbf{\alpha_1 < \alpha_2\ (13)}}$$

Από τη σχέση (13) συμπεραίνουμε ότι η συμπαγής σφαίρα ‘‘πιέζει’’ την κοίλη κατά τη κινησή προς τα κάτω. Άρα έχουν κοινή επιτάχυνση και βρίσκονται διαρκώς σε επαφή.

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha\ (15)} \\ \alpha_1 = \alpha_{\gamma\omega\nu.(1)} \cdot R \\ \alpha_2 = \alpha_{\gamma\omega\nu.(2)} \cdot R \end{cases} \Rightarrow \mathbf{\alpha_{\gamma\omega\nu.(1)} = \alpha_{\gamma\omega\nu.(2)} = \alpha_{\gamma\omega\nu.}\ (16)}$$

<u>Ερώτημα 3:</u>

- Υπολογισμός της κοινής επιτάχυνσης (α)



- Σφαίρα K1

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_{1x} = m_1 \cdot \alpha \Rightarrow W_{1x} + N - T_1 = m_1 \cdot \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{m_1 g\eta\mu\varphi + N - T_1 = m_1 \cdot \alpha\ (17)} \\ \\ \Sigma F_{1y} = 0 \Rightarrow N_1 - W_{1y} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{N_1 = m_1 g\sigma\upsilon\nu\varphi\ (18)} \end{cases}$$

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau_1} = I_1 \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_1 \cdot 0 + W_1 \cdot 0 + N \cdot 0 + T_1 \cdot R = I_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_1 \cdot R = I_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow T_1 \cdot R = \frac{31}{70} m_1 R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_1 = \frac{31}{70} m_1 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot R \xrightarrow{\alpha=\alpha_{\gamma\omega\nu.}\cdot R} \mathbf{T_1 = \frac{31}{70} \cdot m_1 \alpha\ (19)}$$

$$\text{Από } (17) \overset{(19)}{\Longrightarrow} m_1 g\eta\mu\varphi + N - \frac{31}{70} \cdot m_1\alpha = m_1 \cdot \alpha \Rightarrow \mathbf{m_1 g\eta\mu\varphi + N = \frac{101}{70} \cdot m_1 \alpha\ (20)}$$

- **Σφαίρα K_2**

Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής θα έχουμε:

$$\Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_{2x} = m_2 \cdot \alpha \Rightarrow W_{2x} - N - T_2 = m_2 \cdot \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{m_2 g\eta\mu\varphi - N - T_2 = m_2 \cdot \alpha\ (21)} \\ \\ \Sigma F_{2y} = 0 \Rightarrow N_2 - W_{2y} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{N_2 = m_2 g\sigma\upsilon\nu\varphi\ (22)} \end{cases}$$

Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης, θα έχουμε:

$$\Sigma\vec{\tau_2} = I_2 \cdot \vec{\alpha}_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_2 \cdot 0 + W_2 \cdot 0 + N \cdot 0 + T_2 \cdot R = I_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_2 \cdot R = I_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \xrightarrow{I_2=\frac{2}{5}m_2R^2}$$

$$\Rightarrow T_2 \cdot R = \frac{2}{5} m_2 R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \Rightarrow T_2 = \frac{2}{5} m_2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu.} \cdot R \xrightarrow{\alpha=\alpha_{\gamma\omega\nu.}\cdot R} \mathbf{T_2 = \frac{2}{5} \cdot m_2 \alpha\ (23)}$$

$$\text{Από } (21) \overset{(23)}{\Longrightarrow} m_2 g\eta\mu\varphi - N - \frac{2}{5} \cdot m_2\alpha = m_2 \cdot \alpha \Rightarrow \mathbf{m_2 g\eta\mu\varphi - N = \frac{7}{5} \cdot m_2 \alpha\ (24)}$$

Τελικά

$$\text{Από } [(20) + (24)] \Rightarrow (m_1 + m_2) \cdot g\eta\mu\varphi = \left(\frac{101}{70} \cdot m_1 + \frac{7}{5} \cdot m_2\right) \cdot \alpha \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \left(m_1 + \frac{8}{7} \cdot m_1\right) \cdot g\eta\mu\varphi = \left(\frac{101}{70} \cdot m_1 + \frac{7}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot m_1\right) \cdot \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15}{7} \cdot m_1 g\eta\mu\varphi = \frac{213}{70} \cdot m_1\alpha \Rightarrow \mathbf{\alpha = \frac{50}{71} \cdot g\eta\mu\varphi\ (25)}$$

<u>Ερώτημα 4:</u>

- **Υπολογισμός της δύναμης (N) μεταξύ των σφαιρών.**

$$\text{Από (24)} \overset{(25)}{\Longrightarrow} m_2 g ημφ - N = \frac{7}{5} \cdot m_2 \cdot \frac{50}{71} \cdot gημφ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = m_2 gημφ - \frac{70}{71} \cdot m_2 gημφ \Rightarrow \boldsymbol{N = \frac{1}{71} \cdot m_2 gημφ \; (26)}$$

<u>Ερώτημα 5:</u>

- **Υπολογισμός της ελάχιστης τιμής του συντελεστή στατικής τριβής.**

$$\text{Από (19)} \overset{(25)}{\Longrightarrow} T_1 = \frac{31}{70} \cdot m_1 \cdot \frac{50}{71} \cdot gημφ \overset{(2)}{\Rightarrow} T_1 = \frac{31}{70} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{50}{71} \cdot m_2 gημφ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_1 = \frac{155}{568} \cdot m_2 gημφ \; (27)}$$

$$\text{Από (19)} \overset{(25)}{\Longrightarrow} T_2 = \frac{2}{5} \cdot m_2 \cdot \frac{50}{71} \cdot gημφ \overset{(2)}{\Rightarrow} T_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{50}{71} \cdot m_2 gημφ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{T_2 = \frac{20}{71} \cdot m_2 gημφ \; (28)}$$

Οι σφαίρες για να κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν, πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} T_1 \leq T_{1σ(max)} \\ T_2 \leq T_{2σ(max)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 \leq μ \cdot N_1 \\ T_2 \leq μ \cdot N_2 \end{cases} \xRightarrow{(18),(22),(27),(28)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{155}{568} \cdot m_2 gημφ \leq μ \cdot m_1 gσυνφ \\ \frac{20}{71} \cdot m_2 gημφ \leq μ \cdot m_2 gσυνφ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{155}{568} \cdot m_2 gημφ \leq μ \cdot \frac{7}{8} \cdot m_2 gσυνφ \\ \frac{20}{71} \cdot ημφ \leq μ \cdot συνφ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} μ \geq \frac{155}{497} \cdot εφφ \\ μ \geq \frac{20}{71} \cdot εφφ \end{cases} \Rightarrow μ \geq \frac{155}{497} \cdot εφφ \Rightarrow \boldsymbol{μ_{(min)} = \frac{155}{497} \cdot εφφ \; (29)}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Παναγόπουλος Γιώργος

Βουλδής Άγγελος

Μεντζελόπουλος Λευτέρης