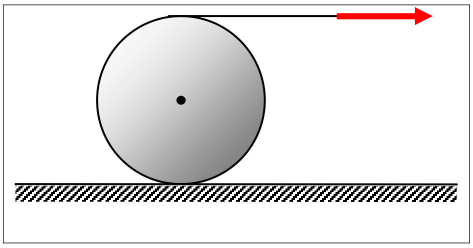
Ένας κύλινδρος που ... σπινάρει



Νήμα τυλίγεται σε λεπτό αυλάκι κατά μήκος της περιφέρειας κυλίνδρου, που έχει μάζα **M=2kg** και ακτίνα **R = 0,2m**.

Ο κύλινδρος συγκρατείται αρχικά στη θέση που φαίνεται στο σχήμα, με το νήμα να εξέχει τεντωμένο από το πάνω μέρος σε οριζόντια θέση, ενώ το τυλιγμένο μήκος του είναι **L=2m**.

Το επίπεδο είναι οριζόντιο και ο συντελεστής τριβής μεταξύ δαπέδου και κυλίνδρου είναι $\mu_{ορ} = \mu_{ολ} = \mu = 0{,}1$.

Ασκώντας στο άκρο του νήματος σταθερή οριζόντια δύναμη **F=18N** αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο τη στιγμή **t=0** να κινηθεί. Το νήμα ξετυλίγεται χωρίς να γλιστρά και παραμένει τεντωμένο μέχρι να ξετυλιχτεί όλο και να φύγει από τον κύλινδρο.

Α) Για όσο χρόνο το νήμα ξετυλίγεται,

Α-1) Να εξετάσετε ποιά φορά έχει η τριβή.

Α-2) Να εξετάσετε επίσης αν ο κύλινδρος κυλίεται με ή χωρίς ολίσθηση.

Α-3) Να υπολογίσετε τα μέτρα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου, καθώς και της γωνιακής του επιτάχυνσης, όσο τον τραβάμε με το νήμα.

Β) Μέχρι τη στιγμή t_1 που ξετυλίγεται όλο το νήμα,

Β-1) Κατά πόσο διάστημα **x** έχει μετατοπιστεί ο κύλινδρος, πόση ενέργεια του προσφέρθηκε μέσω της **F** και πόση χάθηκε σε θερμότητα;

Β-2) Ποιά είναι τη στιγμή αυτή τα μέτρα υ_{cm} και ω της ταχύτητας του κέντρου μάζας και της γωνιακής ταχύτητας που έχει αποκτήσει ο κύλινδρος;

Γ) Να περιγράψετε ποιοτικά την κίνηση του κυλίνδρου μετά τη στιγμή t_1. Μετά από πόσο χρόνο Δt αποκτά το κέντρο μάζας σταθερή ταχύτητα υ_T και ποιό το μέτρο της;

(Ροπή αδράνειας κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = ½\cdot M\cdot R^2$ και $g = 10\ m/s^2$)

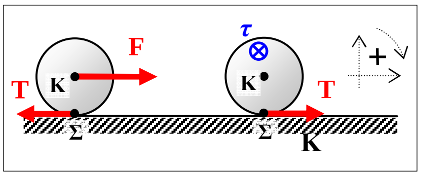
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(*Τα σύμβολα παριστάνουν μέτρα μεγεθών*)

Α) Με την επίδραση της **F** ο κύλινδρος αρχίζει να επιταχύνεται και μεταφορικά προς τα δεξιά αλλά και στροφικά κατά τη φορά του ρολογιού.

<u>ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ</u>:

Αν ο κύλινδρος του διπλανού σχήματος, ακίνητος αρχικά, αποκτήσει μόνο μεταφορική επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha_{cm}}$ (π.χ. με την επίδραση οριζόντιας δύναμης **F** που ασκείται στο CM), τότε το σημείο επαφής Σ τείνει να ολισθήσει προς τα δεξιά, οπότε εμφανίζεται τριβή προς τα αριστερά, που μπορεί να είναι είτε στατική ή τριβή ολίσθησης.



Αν πάλι αποκτήσει μόνο γωνιακή επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu}}$ (π.χ. με την επίδραση ροπής $\boldsymbol{\tau}$ κατά τον άξονά του, όπως οι κινητήριοι τροχοί ενός αυτοκινήτου), τότε το σημείο επαφής Σ τείνει να ολισθήσει προς τα αριστερά και η τριβή που εμφανίζεται (στατική ή ολίσθησης) έχει φορά προς τα δεξιά.

Τι γίνεται όμως στη δική μας περίπτωση, όπου ο κύλινδρος αποκτά ταυτόχρονα και τις δύο αυτές επιταχύνσεις; Η επιτάχυνση τώρα του σημείου Σ προκύπτει από την επαλληλία της μεταφορικής επιτάχυνσης $\boldsymbol{\alpha_{cm}}$ με φορά προς τα δεξιά, και της επιτρόχιας $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$ με φορά προς τα αριστερά: $\boldsymbol{\alpha_\Sigma = \alpha_{cm} - \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$. Έτσι έχουμε:

Αν $\boldsymbol{\alpha_{cm} > \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$ τότε η αναπτυσσόμενη τριβή έχει φορά προς τα αριστερά.

Αν $\boldsymbol{\alpha_{cm} < \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$ τότε η τριβή έχει φορά προς τα δεξιά.

Αν τέλος $\boldsymbol{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$ τότε το Σ δεν τείνει να ολισθήσει και δεν αναπτύσσεται καθόλου τριβή.

Μπορούμε να πούμε γενικότερα, ότι η τριβή αντιστέκεται σ' εκείνη την κίνηση (μεταφορική ή στροφική), εξαιτίας της οποίας το σημείο επαφής Σ αποκτά μεγαλύτερη επιτάχυνση.

Πώς θα υπολογίσουμε όμως τις δύο επιταχύνσεις για να κάνουμε σύγκριση, αφού η τριβή είναι άγνωστη;

Μα η τριβή δεν προκάλεσε τις δύο αυτές επιταχύνσεις, απεναντίας εμφανίστηκε εξ αιτίας τους. Ένας σύντομος τρόπος για να βρούμε την κατεύθυνσή της είναι να την αγνοήσουμε αρχικά.

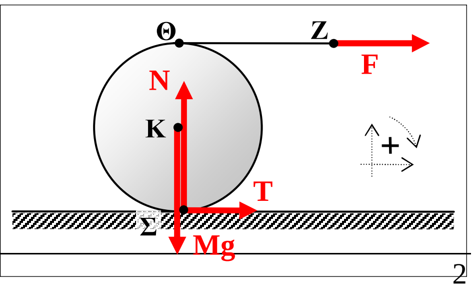
A-1) Επανερχόμενοι λοιπόν στο πρόβλημα αγνοούμε αρχικά την τριβή και εφαρμόζουμε τους νόμους του Νεύτωνα για τη μεταφορική και στροφική κίνηση, για να βρούμε και να συγκρίνουμε τις επιταχύνσεις $\boldsymbol{\alpha_{cm}}$ και $\boldsymbol{\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$:

$$\boldsymbol{\Sigma F_x = M\cdot\alpha_{cm}} \quad (1) \qquad \boldsymbol{\Sigma\tau_{(\kappa)} = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}} \quad (2)$$

Υποθέτοντας ότι το δάπεδο είναι λείο, οι σχέσεις (1) και (2) γίνονται:

$$\boldsymbol{F = M\cdot\alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = F/M} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{F\cdot R = \tfrac{1}{2}\cdot M\cdot R^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R = 2F/M}$$

Είναι εμφανές ότι $\boldsymbol{\alpha_{cm} < \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R}$ από όπου φαίνεται ότι το σημείο επαφής Σ τείνει να γλιστρήσει προς τα πίσω. Επομένως θα πρέπει να εμφανίζεται τριβή προς τα εμπρός (δεξιά).



Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε πάλι τους νόμους του Νεύτωνα συμπεριλαμβάνοντας και την τριβή, επαληθεύοντας και την πρόβλεψη που κάναμε για τη φορά της.

Η τριβή λοιπόν θα πρέπει να έχει φορά προς τα δεξιά και οι σχέσεις (1) και (2) γίνονται:

$$\mathbf{F + T = M \cdot \alpha_{cm}} \quad \mathbf{(3)}$$

$$\mathbf{(F - T) \cdot R = ½ \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F - T = ½ \cdot M \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R} \quad \mathbf{(4)}$$

<u>Επαλήθευση</u>:

Αν η φορά της τριβής ήταν αριστερά αντί δεξιά, τότε οι σχέσεις (3) και (4) θα είχαν τη μορφή:

$\mathbf{F–T = M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = (F–T)/M}$

$\mathbf{(F+T) \cdot R = ½ \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = 2(F+T)/M}$

Θα έπρεπε επίσης στην περίπτωση αυτή να ισχύει:

$\mathbf{\alpha_{cm} > \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \rightarrow (F–T)/M > 2(F+T)/M \rightarrow \ldots \rightarrow T < 0}$ που είναι άτοπο.

Α-2) Υποθέτουμε αυθαίρετα ότι ο κύλινδρος κυλίεται στο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνει. Στην περίπτωση αυτή:

i) η τριβή θα είναι στατική και θα ισχύει: $\mathbf{T \le \mu \cdot N \xrightarrow{N=Mg} T \le \mu \cdot Mg}$ $\mathbf{(5)}$

ii) $\mathbf{\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R}$ $\mathbf{(6)}$

και με συνδυασμό των (3), (4) και (6) θα παίρναμε:

$$\mathbf{\alpha_{CM} = \frac{4F}{3M}} \quad \text{και} \quad \mathbf{T = \frac{F}{3}} \quad \mathbf{(7)}$$

Για τα δεδομένα του προβλήματος όμως, από τις (5) και (7) προκύπτει αντίστοιχα ότι **T≤2N** και **T=6N**. Δηλαδή η διαθέσιμη οριακή τριβή ***δεν επαρκεί για να εμποδίζει την ολίσθηση***.

Επομένως, ***συμβαίνει ολίσθηση***, ο κύλινδρος κινείται δηλαδή «σπινάροντας», και η τριβή έχει μέτρο:

$$\mathbf{T = T_{ολίσθησης} = \mu \cdot Mg = 2N} \quad \mathbf{(8)}$$

Α-3) Από τις σχέσεις (3), (4) και (8) υπολογίζουμε τις ζητούμενες επιταχύνσεις:

$$\mathbf{\alpha_{cm} = (F+T)/M \rightarrow \boxed{\alpha_{cm} = 10\ m/s^2}} \quad \mathbf{(9)}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = 2(F-T)/(M\cdot R) \rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 80\ r/s^2} \quad (10)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου επαφής Σ έχει μέτρο $\boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R = 16\ m/s^2}$ και φορά προς τα πίσω, οπότε είναι εμφανές ότι ο κύλινδρος σπινάρει, εφόσον $\alpha_{cm} < \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$

B) Σύμφωνα με την εκφώνηση, το τυλιγμένο κομμάτι του νήματος έχει αρχικά μήκος **L=2m** και ξετυλίγεται όλο. Το σημείο Ζ μετατοπίζεται επομένως κατά **L** ως προς τη κορυφή Θ του κυλίνδρου. Ο κύλινδρος στρέφεται κατά **θ = L/R** και ταυτόχρονα μετατοπίζεται έστω κατά **x**.

B-1) Ισχύει $\theta = \frac{1}{2}\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1^2$ και $x = \frac{1}{2}\cdot\alpha_{cm}\cdot t_1^2 \rightarrow$

$$\rightarrow x/\theta = \alpha_{cm}/\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \boxed{x = \frac{L}{R}\cdot\frac{\alpha_{CM}}{\alpha_{\gamma\omega\nu}} = 1{,}25\ m} \quad (11)$$

B-2) Μέσω του έργου της δύναμης **F** προσφέρθηκε στον κύλινδρο ενέργεια:

$$\boxed{W_F = F\cdot(L+x) = 58{,}5\ J} \quad (12)$$

Εάν δεν υπήρχε ολίσθηση ο κύλινδρος θα είχε μετατοπιστεί κι αυτός κατά **L** (**L>x**). Λόγω ολίσθησης όμως «έμεινε πίσω» κατά διάστημα **L–x**, ολίσθησε δηλαδή προς τα πίσω σε σχέση με το δάπεδο κατά το διάστημα αυτό. Εξαιτίας της τριβής ολίσθησης χάθηκε σε θερμότητα ποσό ενέργειας:

$$\boxed{Q = |W_T| = T\cdot(L-x) = 1{,}5\ J} \quad (13)$$

Πράγματι, στη μεταφορική κίνηση μεταφέρθηκε ενέργεια:

$$K_1 = \Sigma W_F = (F+T)\cdot x \quad (14)$$

στη στροφική:

$$K_2 = \Sigma W_\tau = (F-T)\cdot R\cdot\theta = (F-T)\cdot L \quad (15)$$

και ισχύει:

$$K_1 + K_2 + Q = W_F \rightarrow (F+T)\cdot x + (F-T)\cdot L + Q = F\cdot(L+x) \rightarrow Q = T\cdot(L-x)$$

Από τις σχέσεις (14) και (15) υπολογίζουμε τα ζητούμενα μέτρα υ_{cm} και **ω**:

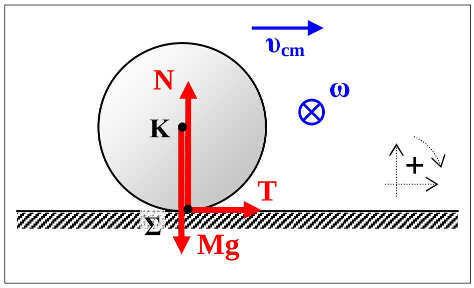
$K_1 = (F+T)\cdot x \rightarrow \frac{1}{2}\cdot M\cdot \upsilon_{cm}^2 = (F+T)\cdot x \rightarrow \boxed{\upsilon_{cm} = 5\ m/s}$ **(16)**

$K_2 = (F-T)\cdot L \rightarrow \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}MR^2)\cdot \omega^2 = (F-T)\cdot L \rightarrow \boxed{\omega = 40\ r/s}$ **(17)**

Γ) Η ταχύτητα του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\upsilon_\Sigma = \upsilon_{cm} - \omega\cdot R = -3\ m/s$$

έχει δηλαδή φορά προς τα αριστερά.



Ο κύλινδρος εξακολουθεί λοιπόν να κινείται «σπινάροντας» και η τριβή ολίσθησης από το δάπεδο συνεχίζει να έχει φορά προς τα δεξιά και τιμή **T = 2N**, όπως βρήκαμε στο ερώτημα Α-2.

Μ' άλλα λόγια, ***συνεχίζει να επιταχύνεται μεταφορικά, αλλά η στροφική του κίνηση είναι στη τώρα επιβραδυνόμενη***, μέχρι κάποια νέα στιγμή t_2 που θα μηδενιστεί η ταχύτητα υ_Σ του σημείου επαφής και μαζί της και η τριβή.

Η κίνησή του μετά τη στιγμή t_2 θα γίνει ομαλή κύλιση χωρίς ολίσθηση.

Αν είναι υ_T και ω_T αντίστοιχα τα μέτρα της τελικής μεταφορικής και γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου, τότε θα ισχύει $\upsilon_T = \omega_T\cdot R$ **(18)**

Από τους γενικευμένους νόμους του Νεύτωνα για τη μεταφορική και τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου κατά το χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$ έχουμε:

$$\Sigma F_x = \frac{\Delta P}{\Delta t} \rightarrow T\cdot \Delta t = M\cdot(\upsilon_T - \upsilon_{CM}) \quad \textbf{(19)}$$

$$\Sigma \tau_{(K)} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \rightarrow -T\cdot R\cdot \Delta t = I\cdot(\omega_T - \omega) \rightarrow T\cdot \Delta t = \frac{1}{2}\cdot M\cdot R\cdot(\omega - \omega_T) \quad \textbf{(20)}$$

Συνδυάζοντάς τες παίρνουμε:

$2\cdot M\cdot(\upsilon_T - \upsilon_{cm}) = M\cdot R\cdot(\omega - \omega_T) \rightarrow 2\cdot\upsilon_T - 2\cdot\upsilon_{cm} = \omega\cdot R - \omega_T\cdot R$

και λόγω της (18):

$$2\cdot\upsilon_T - 2\cdot\upsilon_{cm} = \omega\cdot R - \upsilon_T \rightarrow \boxed{\upsilon_T = \frac{2\cdot\upsilon_{CM} + \omega\cdot R}{3} = 6\ m/s}$$

Με αντικατάσταση τέλος στη (19) βρίσκουμε:

$$\boxed{\mathbf{\Delta t = \frac{M \cdot \left(\upsilon_T - \upsilon_{CM}\right)}{T} = 1\,s}}$$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μητρόπουλος